Egy fizikus kalandjai

a pénzügy világában

Jakovác Antal (Wigner RC)

Budapest, 2020. október 7.

Tartalom

- Bevezetés
- Tulajdon leírása, payoff
- Kereskedés és ár
- Kockázat szerepe
- Kockázat kezelése
- Konklúzió

Tartalom

- Bevezetés
- Tulajdon leírása, payoff
- Kereskedés és ár
- Kockázat szerepe
- Kockázat kezelése
- Konklúzió

Bevezetés

- pénzügy (finance) érdekes, összetett világ
- speci (pl. Fáth Gábor)
- statisztikus fizika reloaded
- mindennapi életben is fontos (l. devizahitel)
- internship programmok
- személyes tapasztalat kb. 1 év a Morgan Stanley Budapest banknál.
- irodalom: Hull, Shreve I, II, https://arxiv.org/abs/2001.09446

Tartalom

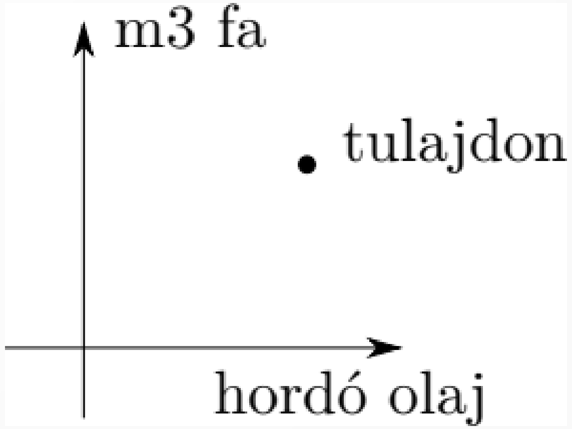
- Bevezetés
- Tulajdon leírása, payoff
- Kereskedés és ár
- Kockázat szerepe
- Kockázat kezelése
- Konklúzió

A tulajdon matematikai leírása

- tulajdon: miből mennyink van (pl. 2.5 hordó olaj, 3.2 m3 fa, stb) – általánosan "asset" és "portfolio"
- matematikai struktúra: tulajdon valós vektortér $P \in A$, ahol bázis az asset-ek, ezek vannak összeadva súlyozva

$$P = 2.5\,\text{hordó olaj} + 3.2\,m^3\ \text{fa}$$

  itt a "hordó olaj" és a "m^3 fa" a bázisvektorok
- lehet elvont tulajdon is (munkaerő, élet, stb.)
- speciális asset: pénz (Ft, vagy más valuták)



Jövőbeli tulajdon (ígéret)

- Hogyan írjuk le a tartozást? negatív tulajdon? kölcsönkérek egy fúrógépet:

$$P = +1\ \text{fúró} - 1\ \text{fúró} = 0,$$

  de ez nem igaz, mert a fúró nálam van, használhatom.

- Helyette: +1 fúró, és ígéret, hogy visszaadom t időpontban

$$P = +1\ \text{fúró} - 1\, p\left(\text{fúró}, t\right).$$

  az ígéret új asset, új bázsivektor, p lineáris

- opcionalitás: az ígéretnek lehetnek feltételei, pl.

$$P = +1\ \text{fúró} - 1\, p\left(\text{fúró}, t, \text{ha süt a nap}\right).$$

payoff

Így egy egész jövőbeli tervet fel lehet vázolni: **payoff.** pl.:

- **loan** (kölcsön): most kapok egy X összeget, c részletekben törlesztem, végül a maradékot kifizetem

$$L = X\ \mathrm{Ft} - \sum_{n=1}^{N} c_n\, p(\mathrm{Ft}, t_n) - X_r\, p(\mathrm{Ft}, T)$$

- **future**: t-ben vásárolok (long, +) vagy eladok (short, -) egy “a” asset-ot adott K összegért (strike)

$$F = \pm\, p(\mathrm{a} - K\,\mathrm{Ft}, t)$$

- **european option**: t-ben lehetőségem van (long) vásárolni (call) vagy eladni (put) egy “a” asset-ot

$$O_{\mathrm{EU}} = \pm\, p(\mathrm{a} - K\,\mathrm{Ft}, t, \text{ha nekem megéri})$$

amerikai: $t \to [0, T]$, bermudai: $t \in \{t_1, t_2, \ldots\}$

payoff

- **swap:** kicserélek két asset-ot egy időre
  - CMS (constant maturity swap): piaci kamatot fix törlesztőrészletre
    $$CMS = \sum_{n=1}^{N} (c-r) N \; p(\mathrm{Ft}, t_n)$$
  - CDS (credit default swap): csődvédelmet fix törlesztőrészletre
    TRS (total return swap): valamilyen assetot fix töresztőrészletre
    $$CDS, TRS = a - \sum_{n=1}^{N} c \, N \; p(\mathrm{Ft}, t_n)$$
- **cap/floor**: akkor fizet, ha egy árfolyam meghalad egy értéket
  $$\mathrm{cap} = N \, p(\mathrm{Ft}, T, \Theta(S_{min} - S))$$

payoff

- **collateralized future** (biztosított future üzlet): 2008 óta nem bíznak annyira az ígéretekben, és rendszeresen nullára kell rendezni az üzletet

$$F_{col} = S_0 - K + \sum_{n=1}^{N} p\left(\left(S_i - S_{i-1}\right)\mathrm{Ft}, t_n\right) + p\left(\mathrm{a} - S_N \mathrm{Ft}, t\right)$$

- mindezek a payoff-ok önálló üzleti termékké (asset) válnak, amelyekkel kereskedni lehet.

Tartalom

- Bevezetés
- Tulajdon leírása, payoff
- Kereskedés és ár
- Kockázat szerepe
- Kockázat kezelése
- Konklúzió

Kereskedés és ár

- Kereskedés (trade): kicserélünk két/több asset-ot, valami kifizetési terv (payoff) alapján. Pl. future üzlet, az egyik az eladó (short position), a másik a vevő (long position)

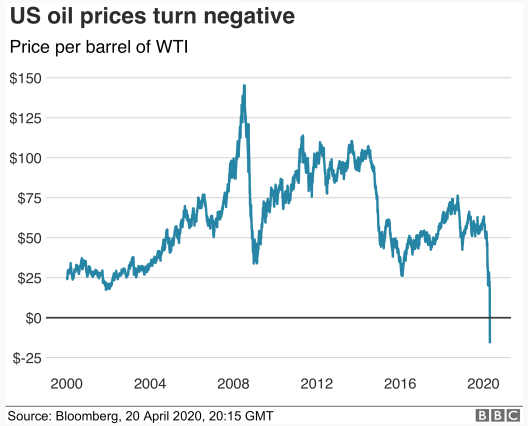
$$P_1 = p\left(\mathrm{a} - K\,\mathrm{Ft}, t\right), \quad P_2 = -p\left(\mathrm{a} - K\,\mathrm{Ft}, t\right)$$

- Lehet több oldalú trade is, ekkor különbözőek a payoff-ok
- Az össz tulajdonváltozás 0.
- **fair business:** senki nem nyer vagy veszít az üzleten
- de mennyit ér egy ígéret ma??

Kereskedés és ár

- pénz univerzális értékmérő / csereeszköz, mindent ehhez viszonyítunk
- nincs ab ovo értéke a termékeknek! trade-nként más a csereearány
- ha valaki olcsón árul, mások megveszik, és drágán eladják (arbitrage)
  ha valaki drágán árul, nem veszik meg tőle
  ha sokan akarnak venni, drágább lesz a termék
  ha nem keresik, olcsóbb lesz
- kialakul egy időfüggő aktuális érték (ami még mindig fluktuál): ár

$$S : A \times R \rightarrow R, \; S(a,t) \in R, \; \text{lineáris } A\text{-ban}$$



Mi befolyásolja az árat?

fair business és arbitrage-mentesség

- pl. mennyi a mai ára egy assetre vonatkozó jövőbeli ígéretnek?

$$S(p(\mathrm{a}, t), 0) = ?$$

- ha $S(p(\mathrm{a}, t), 0) > S(\mathrm{a}, 0)$, a jobb oldal az “a” asset mai ára, akkor ma megveszem “a”-t, és eladom a jövőre vonatkozó ígéretet

$$P = \mathrm{a} - p(\mathrm{a}, t)$$

  a feltevésünk miatt $S(P, 0) < 0$, ugyanakkor t-ben beváltom az ígéretemet, azaz $P = 0$, $S(P, t) = 0$: azaz P értéke nő!

- következmény: $S(p(\mathrm{a}, t), 0) = S(\mathrm{a}, 0)$, egy asset-re tett ígéret ára az asset árával egyezik.

Mi befolyásolja az árat?

fair business és arbitrage-mentesség

- mennyi az ára egy jövőbeli fix kifizetésnek?

$$S\left(p\left(1\,\mathrm{Ft}, t\right), 0\right) = X$$

- két módon járhatok el: elfogadom az ígéretet, vagy az 1 Ft-ot beteszem a bankba, ahol kapok rá r_{year} évi kamatot (rate)
- fair business vagy arbitrage-mentesség: ugyanaz kell legyen a végösszeg! $X\left(1+r_{\mathrm{year}}\right)^{t/\mathrm{year}} = 1\,\mathrm{Ft}$
- tehát a fix kifizetés “diszkontálódik” (discount)

$$S\left(p\left(1\,\mathrm{Ft}, t\right), 0\right) = \left(1+r_{\mathrm{year}}\right)^{-t/\mathrm{year}} = e^{-rt}, \qquad r = \ln\left(1+r_{\mathrm{year}}\right)\frac{1}{\mathrm{year}}$$

- más esetekben már összetettebb modell kell: **market model,** az árak alakulásának (sztochasztikus) modellje.

Tartalom

- Bevezetés
- Tulajdon leírása, payoff
- Kereskedés és ár
- Kockázat szerepe
- Kockázat kezelése
- Konklúzió

A kockázat szerepe

Ha van egy 20%-os és egy 10%os évi hozamú befektetés, ki választaná a 10%-ost?

- ha más a kockázat (risk), akkor az effektív hozam lecsökkenhet. pl. ha a 20%-os asset-nak d=10%-os csődkockázata (default risk) van, akkor csak 8%-os az effektív hozama

$$(1+r)(1-d)=1.2\times 0.9=1.08$$

- nehéz becsülni a kockázatot …

A kockázat szerepe

Másik effektus: **leverage effect** (emelő effektus)

- banki működés: 1Ft tőkére hitelt vesznek fel, az 1Ft mint hitelbiztosíték (collateral) szerepel. A tőkeáttétel (leverage ratio): az egységnyi tőkére jutó hitel (debt-to-equity) akár 10 is lehet.
- r_0 a hitel kamata, r a befektetés hozama, c a tőkeáttétel, akkor a hitelezésen keresztül elérhető kamat (rate): $(r-r_0)c$ pl. $r=10\%, r_0=5\%, c=5$ → $r_{\text{eff}}=25\%$
- ha kockázatmentes a befektetés, nem kell biztosíték, a haszon biztos: azaz ha $r \neq r_0$ lenne, $c \rightarrow \infty$ esetén végtelen hasznot lehetne realizálni. tehát a **kockázatmentes hozam egyértelmű** (**risk-free rate)**, pl. LIBOR rate (London Inter-Bank Offered Rate)

A kockázat szerepe

Kockázatos befektetések

- a piac rosszul tolerálja a kockázatos befektetéseket (piaci regulációk)
- akkor lehet leverage effektust használni, ha a teljes portfolió kockázata alacsony
- emiatt viszont **minden asset** egy kockázatmentes portfolio része, amelynek a **hozama a risk-free rate.**
- általában tehát $\langle \dot{S} \rangle = r \langle S \rangle \Rightarrow \frac{d}{dt} e^{-rt} \langle S \rangle = 0 \Rightarrow \langle S \rangle_{t=0} = e^{-rt} \langle S \rangle_t$

(martingál)

ezzel kiszámítható egy payoff jelenértéke!

A kockázat szerepe

Gaussi üzleti modell: az árfluktuációk leírására

- mindegy miben mérjük az árat, így csak az árarány számít; a természetes változó $\ln S/S_0$, S_0 a jelenlegi ár
- gaussi modell: N lépés után az átlag N-nel nő, a szórás $\sqrt{N}$ -nel, ez átvihető az időre
- risk-neutral measure: minden asset hozama a risk-free rate $\langle \dot{S} \rangle = r \langle S \rangle$
- az ár valószínűségi sűrűségfüggvénye:

  (σ volatilitás = szórás)

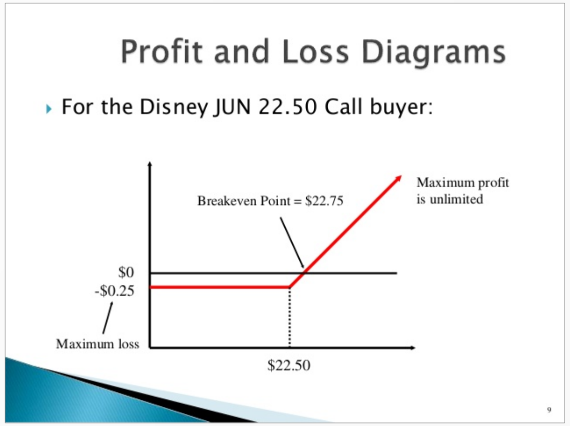
$$\rho(S) = \frac{1}{S\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 t}\left(\ln\frac{S}{S_0} - \bar{r}t\right)^2}, \qquad \bar{r} = r - \frac{1}{2}\sigma^2$$

Asset ára

Most már meg tudjuk mondani, mi egy pénzügyi termék (payoff) értéke (present value)

- Általában: az asset értéke a payoff $f(S,t)$ várható értéke a risk-neutral measure-re ($\rho(S,t)$ eloszlásfüggvénnyel), diszkontálva

$$PV = e^{-rt} \langle f(S,t) \rangle_{\rho(S,t)}$$



- pl. európai opciónál a portfolio

$$P = p(\mathrm{a} - K\,\mathrm{Ft}, t, \text{ha nekem megéri})$$

ennek értéke t-ben (payoff): $S(P,t) = (S-K)\Theta(S-K)$

értéke t=0-ban (PV): $S(P,0) = \langle (S-K)\Theta(S-K) \rangle_{\rho}$

Gaussi modellben kiértékelve kapjuk a Black-Scholes formulát

$$S(P,0) = \int_0^{\infty} \frac{dS}{S\sqrt{2\,pi\,\sigma^2 t}} (S-K)\Theta(S-K)\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2 t}\left(\ln\frac{S}{S_0} - \bar{r}\,t\right)^2}$$

Tartalom

- Bevezetés
- Tulajdon leírása, payoff
- Kereskedés és ár
- Kockázat szerepe
- Kockázat kezelése
- Konklúzió

Kockázat kezelése

Milyen kockázati tényezők vannak?

- inflationary / interest rate risk (inflációs / kamatláb kockázat)
- default risk (csődkockázat)
- FX risk (exchange/currency risk) (árfolyamkockázat)
- credit risk (hitelkockázat)
- model kockázat (mennyire fluktuálnak a model paraméterek)
- ...

Nagyon sok féle kockázat van, ezeket legjobb mind figyelembe venni illetve lecsökkenteni (mitigation)

Kockázat kezelése: indexek

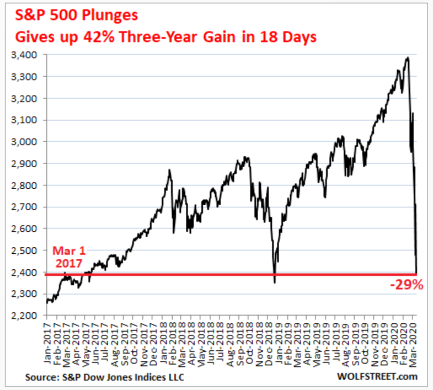
Hogyan lehet csökkenteni a kockázatot?

- indexek készítésével: mutató ill. kereskedési egység
- hedging (hitelfedezet)

Indexek: egymástól független a_i asset-okat kombinálunk $I = \sum_{i=1}^{N} w_i a_i$

- tőzsdei mutatók (S&P100, 500, 1000, Nasdaq Composite, ...)
- portfolio, illetve kereskedési egység
- matematika: véletlen változók összege; ha Gaussi

$$\sigma_N^2 = \frac{\sigma^2}{N}$$



- különböző változóknál az eredő volatilitás függ az optimalizációtól

Kockázat kezelése: hedging

Hedging: egymással szorosan összefüggő termékeket kombinálunk (underlying & derivatives, pl. opciók)

- az underlying asset a ára $S(t)$, a derivatíva d_a ára ettől függ $S_d(S,\ldots)$
- kockázat, pl. hogy az árfolyam erősen fluktuál, ekkor tudok olyan portfoliót készíteni, ahol legalább a jelenlegi árnál az első deriválttól meg tudok szabadulni:

$$P = d_a + \alpha\, a\,, \qquad S_P(S) = S_d(S) + \alpha\, S$$

$$\Delta = S'_P(S_0) \quad \rightarrow \quad \Delta = 0 = S'_d(S_0) + \alpha$$

ez a “delta-hedging”, vagy delta-neutrális pozíció

Kockázat kezelése: hedging

- két derivatívával a második deriválttól is meg tudunk szabadulni

$$P = d_1 + \beta d_2 + \alpha a, \quad S_P(S) = S_1(S) + \beta S_2(S) + \alpha S$$

$$\Delta = S'_P(S_0) \quad \rightarrow \quad \Delta = 0 = S'_1(S_0) + \beta S'_2(S_0) + \alpha$$

$$\Gamma = S''_P(S_0) \quad \rightarrow \quad \Gamma = 0 = S''_1(S_0) + \beta S''_2(S_0)$$

ez a delta-gamma neutrális pozíció

Kockázat kezelése: hedging

- model kockázat: a market model-ünk nem tökéletesen írja le a piaci helyzetet, így paraméterei fluktuálhatnak (elsősorban a volatilitás)
- két derivatívával az első deriválttól, és a volatilitás szerinti deriválttól is megszabadulhatunk

$$P = d_1 + \beta d_2 + \alpha a, \quad S_P(S) = S_1(S, \sigma) + \beta S_2(S, \sigma) + \alpha S$$

$$\Delta = \partial_S S_P(S_{0,} \sigma_0) \quad \rightarrow \quad \Delta = 0 = \partial_S S_1(S_{0,} \sigma_0) + \beta\, \partial_S S_2(S_{0,} \sigma_0) + \alpha$$

$$\kappa = \partial_\sigma S_P(S_{0,} \sigma_0) \quad \rightarrow \quad \kappa = 0 = \partial_\sigma S_1(S_{0,} \sigma_0) + \beta\, \partial_\sigma S_2(S_{0,} \sigma_0)$$

ez a delta-kappa (vagy vega) neutrális pozíció

Mit csinál egy trader?

- igyekszik jó üzletet kötni, azaz olyan portfoliót előállítani, ahol a profitot maximális
- egy pénzügyi termék árát, és a riskeket ("Greeks") egy szakértői gárda (desk) adja meg
- a portfolió kockázata az egyes termékek kockázatának lineáris kombinációja
- a riskekre korlát van, ezt a portfolió nem haladhatja meg!

Name	Symbol	Derivative
Delta	Δ	$\frac{\partial V}{\partial S_0}$
Gamma	Γ	$\frac{\partial^2 V}{\partial S_0^2}$
Rho	ρ	$\frac{\partial V}{\partial r}$
Theta	Θ	$\frac{\partial V}{\partial t}$
Vega	ϑ	$\frac{\partial V}{\partial \sigma}$

Tartalom

- Bevezetés
- Tulajdon leírása, payoff
- Kereskedés és ár
- Kockázat szerepe
- Kockázat kezelése
- Konklúzió

Összefoglalás

- nagyon érdekes világ
- valószínűségszámítás, statisztikus fizika
- +új elvek, +szótár
- érdemes megismerkedni vele