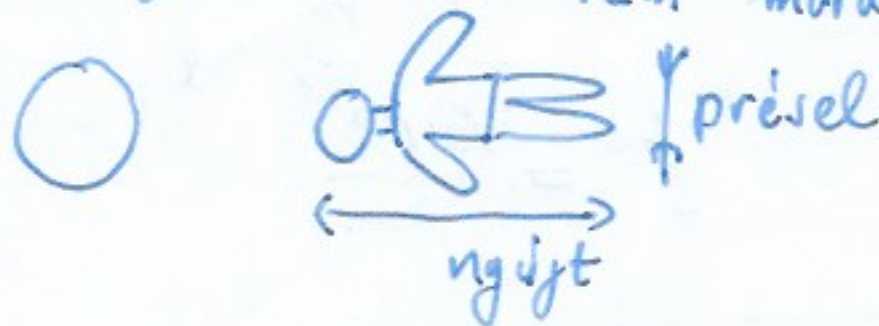


Görbület és gravitáció

①

1. kérdés: Honnan tudjuk, h. $g_{\mu\nu}(x)$ grav. mezőtől vagy vmi furcsa koord. r. választástól nem triviális?

Válasz: a) árapályerők $\sim$ párhuzamosan induló geodetikusok nem maradnak párhuzamosak



b) $\exists$ olyan koord. r. ahol nem csak egy pontban $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$

c) párhuzamos eltolás zárt görbén nem viszi önmagába a vektorokat



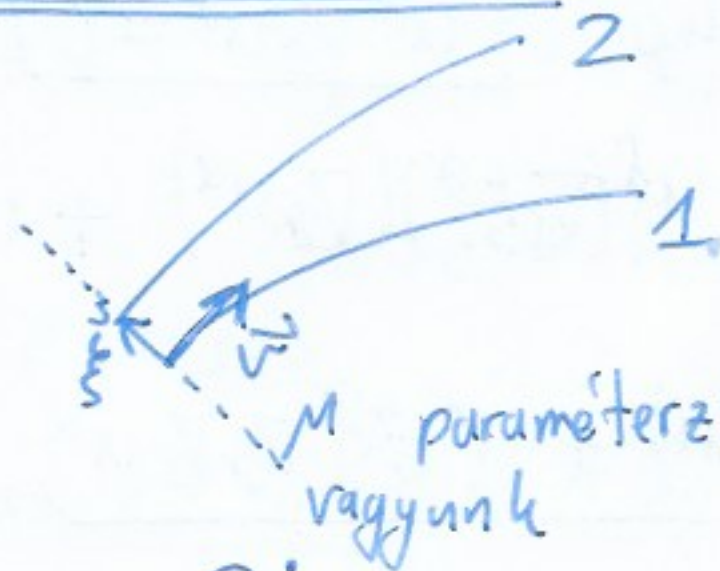
d) $[\nabla_\mu, \nabla_\nu] \neq 0$

2. kérdés: Grav. mező dinamikája?

Geodetikus deriváció (Newton) Két közeli geodetikus

$$\dot{V}_i = -\partial_i \phi$$

$$\xi_i = \frac{\partial x_i}{\partial \mu}$$



$$\dot{V}_i|_2 \cong \dot{V}_i|_1 + \delta\mu \frac{\partial \dot{V}_i}{\partial \mu}|_1 = \dot{V}_i|_1 + \delta\mu \ddot{\xi}|_1$$

$$-\partial_i \phi|_2 \cong -\partial_i \phi|_1 - \delta\mu \eta_j \partial_i \partial_j \phi|_1$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\xi}_i = -\eta_j \partial_i \partial_j \phi} \quad \text{geodetikus deriváció} \sim \partial_i \partial_j \phi$$

$$\text{trace}(\partial_i \partial_j \phi) = \Delta \phi = 4\pi \rho G \sim \text{anyagűrűség}$$

Geodetikus deviació (relativisztikus)

$x^\alpha = r^\alpha(\tau, \mu)$
 $\uparrow$ param. mentén $\nwarrow$ melyik geodetikuson vagyunk
 $u^\alpha = \frac{\partial r^\alpha}{\partial \tau}$ $f^\alpha = \frac{\partial r^\alpha}{\partial \mu}$

Állítás:

$$\frac{D^2 f^\alpha}{D\tau^2} = u^\delta \nabla_\delta (u^\sigma \nabla_\sigma f^\alpha) = f^\sigma u^\delta (\nabla_\delta \nabla_\sigma - \nabla_\sigma \nabla_\delta) u^\alpha$$

Biz.: $\frac{\partial}{\partial \mu} \frac{\partial r^\alpha}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial r^\alpha}{\partial \mu} \Rightarrow f^\beta \partial_\beta u^\alpha = u^\beta \partial_\beta f^\alpha$

$\Rightarrow \boxed{f^\beta \nabla_\beta u^\alpha = u^\beta \nabla_\beta f^\alpha} \quad (1) \quad$ hiszen

$$f^\beta \partial_\beta u^\alpha + f^\beta \Gamma^\alpha_{\beta\sigma} u^\sigma = u^\beta \partial_\beta f^\alpha + u^\beta \Gamma^\alpha_{\beta\sigma} f^\sigma$$

másfelől geodetikus $\boxed{u^\beta \nabla_\beta u^\alpha = 0} \quad (2)$
 $\nwarrow$ torziómentesség $\nearrow$

$$u^\delta \nabla_\delta (u^\sigma \nabla_\sigma f^\alpha) = u^\delta (\nabla_\delta f^\sigma) (\nabla_\sigma u^\alpha) + u^\delta f^\sigma \nabla_\delta \nabla_\sigma u^\alpha$$

$$= \underbrace{u^\delta (\nabla_\delta f^\sigma) (\nabla_\sigma u^\alpha)}_{\mathcal{A}} + u^\delta f^\sigma \nabla_\sigma \nabla_\delta u^\alpha + \underbrace{u^\delta f^\sigma (\nabla_\delta \nabla_\sigma - \nabla_\sigma \nabla_\delta) u^\alpha}_{\text{ezt szeretnénk}}$$

$$\mathcal{A} = u^\delta (\nabla_\delta f^\sigma) (\nabla_\sigma u^\alpha) + f^\sigma \nabla_\sigma (u^\delta \nabla_\delta u^\alpha) - \underbrace{f^\sigma (\nabla_\sigma u^\delta) (\nabla_\delta u^\alpha)}_{\substack{(1) \rightarrow 0 \\ \delta \leftrightarrow \sigma}}$$

$$\mathcal{A} = (u^\delta \nabla_\delta f^\sigma - f^\delta \nabla_\delta u^\sigma) (\nabla_\sigma u^\alpha) \stackrel{(2)}{=} 0$$

riemann-tenzor $\boxed{[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\rho = R^\rho_{\sigma\mu\nu} V^\sigma}$ (3)

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \nabla_\nu V^\rho &= \partial_\mu \nabla_\nu V^\rho + \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \nabla_\nu V^\sigma - \Gamma^\kappa_{\mu\nu} \nabla_\kappa V^\rho \\ &= \partial_\mu (\partial_\nu V^\rho + \Gamma^\rho_{\nu\sigma} V^\sigma) + \Gamma^\rho_{\mu\sigma} (\partial_\nu V^\sigma + \Gamma^\sigma_{\nu\kappa} V^\kappa) - \Gamma^\kappa_{\mu\nu} (\partial_\kappa V^\rho + \Gamma^\rho_{\kappa\lambda} V^\lambda) \\ &= \underline{\partial_\mu \partial_\nu V^\rho} + (\partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma}) V^\sigma + \underline{\Gamma^\rho_{\nu\sigma} \partial_\mu V^\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \partial_\nu V^\sigma \\ &\quad + \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma_{\nu\kappa} V^\kappa - \underbrace{\Gamma^\kappa_{\mu\nu} \partial_\kappa V^\rho} - \underbrace{\Gamma^\kappa_{\mu\nu} \Gamma^\rho_{\kappa\lambda} V^\lambda} \end{aligned}$$

aláhúzott: $\mu\nu$ -ben szimmetrikus

$$\Rightarrow \boxed{R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}}$$

Tulajdonságok (HF): $R^\rho_{\sigma\mu\nu} = -R^\rho_{\sigma\nu\mu}$

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} + R^\rho_{\nu\sigma\mu} + R^\rho_{\mu\nu\sigma} = 0$$

$$g_{\mu\beta} R^\beta_{\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu} \Rightarrow R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\nu\mu\rho\sigma}$$

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\sigma\rho\nu\mu}$$

256 elemből csak 20 független

Bianchi-azonosság: $\nabla_\alpha R_{\beta\gamma\mu\nu} + \nabla_\beta R_{\gamma\alpha\mu\nu} + \nabla_\gamma R_{\alpha\beta\mu\nu} = 0$

Ricci-tenzor: $\boxed{R^\rho_{\mu\nu\rho} = R_{\mu\nu}}$ Ricci-skalár: $\boxed{R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^\mu_\mu}$

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\rho\sigma\nu\mu} \Rightarrow R_{\rho\sigma}{}^\mu{}_\mu = 0$$

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu} \Rightarrow R^\rho{}_\rho{}_{\mu\nu} = 0$$

$$R^\rho_{\mu\rho\nu} = g^{\rho\sigma} R_{\sigma\mu\rho\nu} = -g^{\rho\sigma} R_{\sigma\nu\rho\mu} = -R^\rho_{\nu\rho\mu} = -R_{\mu\nu}$$

haszonból $R_{\mu}{}^\rho{}_{\rho\nu} = -R_{\mu\nu}$ és $R_{\mu}{}^\rho{}_{\nu\rho} = R_{\mu\nu}$
 $\Rightarrow$ az egyetlen nemtriviális trace

Einstein - egyenlet

geodetikus deviáció $\nearrow$ Newton $\sim \nabla \cdot \nabla \phi \xrightarrow{-\text{Tr}} \sim$ anyagsűrűség
 $\searrow$ relat. $\sim R^\alpha_{\beta\alpha\delta} u^\beta u^\delta \xrightarrow{-\text{Tr}} \sim$ energiasűrűség

$$- R^\alpha_{\beta\alpha\delta} u^\beta u^\delta = R_{\beta\delta} u^\beta u^\delta \stackrel{?}{=} K T_{\beta\delta} u^\beta u^\delta$$

$$\Rightarrow \text{ } \forall u^M\text{-re} \quad R_{\alpha\beta} = K T_{\alpha\beta}$$

u^M "négyeselemek" megfigyelt által mért energiasűrűség

ez volt Einstein első tippje, de ez nem lehet jó, mert szeretnénk h. $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ legyen

$$\text{Bianchi} \Rightarrow \nabla^\mu R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \nabla_\nu R$$

$$\Rightarrow \nabla^\mu \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) = 0$$

$\Rightarrow$ Einstein - egyenlet:

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = K T_{\mu\nu}}$$

A hatás aminek a variálásával ez megkapható (a variálás nem olyan egyszerű, most róla hátrébb marad)

Einstein - Hilbert - hatás

$$S = -\frac{1}{2K} \int d^4x \sqrt{-g} R + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{anyag}}$$

$$\text{ha } T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{anyag}})}{\delta g^{\mu\nu}}$$

pl. skalarmezőre $T_{\mu\nu} = (\partial_\mu \phi)(\partial_\nu \phi) - g_{\mu\nu} \mathcal{L}_{\text{anyag}}$
(ami korábban volt, csak $\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}$)

Newtoni limit ① $\left(\frac{1}{c}\right) v \ll 1$ $v = O(\epsilon)$ $\epsilon \ll 1$ ⑤
 ② $\left(\frac{1}{c}\right) \text{időderiv.} \ll \text{térderiv}$ $\left(\frac{1}{c}\right) \frac{\partial f}{\partial t} = O(\epsilon) \frac{\partial f}{\partial x^i}$

③ $\exists$ coord. r., ahol $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu}$

$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \epsilon h^{\mu\nu}$ ahol $h^{\mu\nu} = \eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} h_{\alpha\beta}$

$T^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{\epsilon}{2} \eta^{\alpha\delta} (\partial_{\gamma} h_{\beta\delta} + \partial_{\beta} h_{\gamma\delta} - \partial_{\delta} h_{\beta\gamma}) + O(\epsilon^2)$

$\frac{d^2 x^{\alpha}}{ds^2} + T^{\alpha}_{\beta\gamma} \frac{dx^{\beta}}{ds} \frac{dx^{\gamma}}{ds} = 0 \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{dx^i}{ds} &= \frac{dt}{ds} \frac{dx^i}{dt} = O(\epsilon) \quad i=1,2,3 \\ \frac{dx^0}{ds} &= \frac{dt}{ds} = 1 + O(\epsilon) \end{aligned} \right\}$

$\Rightarrow \frac{d^2 x^i}{dt^2} + T^i_{00} \cong 0$

$T^i_{00} = -\frac{\epsilon}{2} (\partial_0 h_{0i} + \partial_0 h_{0i} - \partial_i h_{00}) + O(\epsilon^2) = \frac{\epsilon}{2} \partial_i h_{00} + O(\epsilon^2)$

$\Rightarrow \frac{d^2 x^i}{dt^2} \cong -T^i_{00} \cong -\frac{\epsilon}{2} \partial_i h_{00} \stackrel{!}{=} -\partial_i \phi \leftarrow \begin{matrix} \text{newrel.} \\ \text{grav.} \\ \text{potenciál} \end{matrix}$

$\Rightarrow \epsilon h_{00} = 2\phi$ (ezt múlt órán is láttuk, csak máshogy)

$R_{\alpha\beta} = \partial_{\beta} T^{\beta}_{\alpha} - \partial_{\alpha} T^{\beta}_{\beta} + O(\epsilon^2)$

$\Rightarrow R_{00} = -\partial_i T^i_{00} + O(\epsilon^2) = -\frac{\epsilon}{2} \Delta h_{00} + O(\epsilon^2) = \Delta \phi + O(\epsilon^2)$

$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu} \Rightarrow R - \frac{1}{2} 4R = \kappa T^{\beta}_{\beta} \Rightarrow R_{\mu\nu} = \kappa (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^{\beta}_{\beta})$

$T_{\mu\nu} \cong \text{diag}(Pc^4, 0, 0, 0) \Rightarrow T^{\beta}_{\beta} = g^{\beta\sigma} T_{\beta\sigma} \cong Pc^4$

$\Delta \phi \cong R_{00} \cong \kappa (T_{00} - \frac{1}{2} \eta_{00} T^{\beta}_{\beta}) \cong \frac{\kappa}{2} (Pc^4) \stackrel{!}{=} 4\pi G \rho \Rightarrow \kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$

Klasszikus kísérleti tervtel:

Einstein, 1910-es évek

- 1) Gravitáció görbülése / redőírtáció
Adams 1925 $\hookrightarrow$ Sirius B fehér törpe (nem megbízható)
Popper 1954 $\hookrightarrow$ első precíz fehér törpés mérés
Pound & Rebka 1959 $\hookrightarrow$ Föld grav. terében
- 2) Merkúr perihéliumprecessiója
már ismert asztrológiai anomália volt
- 3) Fényelhajlás
Eddington 1919
- 4) Shapiro delay

Gravitációs idő dilatació/vöröseltolódás

Oru grav. térken, nyugatamban

$K' \leftarrow \text{Roh. inertiar endsur}$

$u^M = (1, 0)$
 ekvivalenciaelv
 $\Delta t = \sqrt{g_{\mu\nu} \Delta x^{\mu} \Delta x^{\nu}} \Rightarrow \sqrt{g_{\mu\nu}(x) \Delta x^{\mu} \Delta x^{\nu}}$
 det. rendszer
 az álló órák közötti idő grav. nélkül

$$\frac{\Delta x_0}{\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}$$

ezt az inflációt nem tudjuk megmérni, mert ha veszünk egy márkát, az is így lesz.

De meq tudynh mondani, gg ha ko't fix pontban
hálónbözök a faktor

x_2 -ben atomi időintervallumának Δt periódusideje lenne grav.
nélkül: $\Delta t_2 = \Delta t / \sqrt{g_{00}(x_2)}$

x_1 -ben vez az dt menet: $\Delta t_1 = \Delta t / \sqrt{g_{00}(x_1)}$

$\Rightarrow$ atomi átmenet frekvenciája $\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \sqrt{\frac{g_{00}(x_2)}{g_{00}(x_1)}} \quad (7)$

gyenge tér $g_{00} \approx 1 + 2\phi$

$$\left. \begin{array}{l} \nu_2 = \nu + \Delta\nu \\ \nu_1 = \nu \end{array} \right\} \frac{\nu_2}{\nu_1} = 1 + \frac{\Delta\nu}{\nu} = \sqrt{\frac{1+2\phi_2}{1+2\phi_1}} \approx 1 + (\phi_2 - \phi_1)$$

$\phi_2 \equiv \phi(x_2)$
 $\phi_1 \equiv \phi(x_1)$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\Delta\nu}{\nu} \approx \phi(x_2) - \phi(x_1)}$$

pl $M_{\text{Nap}} \approx 1.97 \cdot 10^{33} \text{ g}$ $R_{\text{Nap}} = 0.695 \cdot 10^6 \text{ km}$

$\phi_{\text{Nap felre}} - \phi_{\infty \text{ messze}} = - \frac{GM_{\text{Nap}}}{R_{\text{Nap}}} \approx -2 \cdot 10^{-6}$
nagyon kicsi effektus

(de fontos, mert közvetlenül az ekvivalenciaelvet teszteli)

Schwarzschild-megoldás $\hookrightarrow$ csillagon kívüli "grav. mező"

Állítás: (biz. nélkül) a legáltalánosabb statikus, izotrop (gömbszim.) megoldása $R_{rr} = 0$ -nak (vákuum mego.)

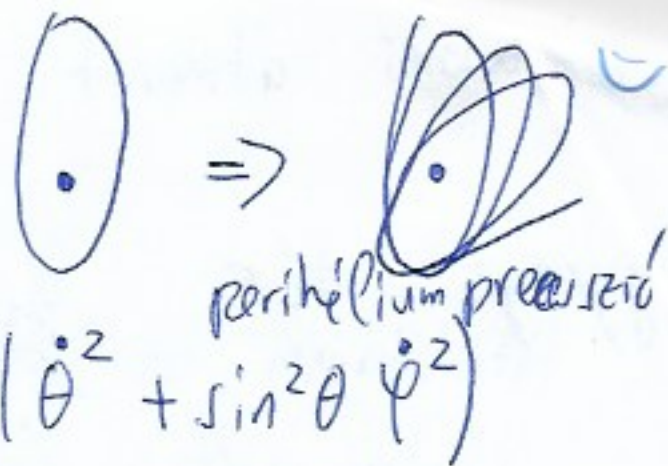
$\exists$ koord. rendszer, ahol $g_{\mu\nu}$ t ften

$\exists$ koord. r. ahol ds az $\vec{x}$ és $d\vec{x}$ -től csak a forgásiir. mennyiségekben kerekzetül függ: $\vec{x}^2, \vec{x} \cdot d\vec{x}, d\vec{x}^2$

$\Rightarrow \exists$ koord. ahol

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2$$

geodetikusok: $m > 0 \Rightarrow$ bolygómozgás
 $S = \int ds \, g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$ ahol $(\dot{}) = \frac{d}{ds}()$



$$L = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{t}}\right)' - \frac{\partial L}{\partial t} = \left(2\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \dot{t}\right)' = 0 \Rightarrow \boxed{E = m\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \dot{t} = \text{const.}}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right)' - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = (-2r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi})' = 0 \Rightarrow \boxed{J = m r^2 \dot{\varphi}^2 = \text{const.}}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)' - \frac{\partial L}{\partial \theta} = (-2r^2 \dot{\theta})' + 2r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + 2 \frac{\dot{r}}{r} \dot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 = 0$$

ha úgy választjuk meg a koordinátákat, hogy
 kezdetben $\theta = \pi/2$ és $\dot{\theta} = 0$ akkor úgy is mondhatjuk,
 ahogy a Newtoni mechanikában is, úgy a mozgás
 egy síkban történik

Merkúr: $5 \cdot 10^{-7}$ rad
 DE: ez kisebb
 effektus,
 mint a
 többi
 bolygó
 hatásai
 de már
 Einstein
 idején
 kellett

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right)' - \frac{\partial L}{\partial r} = \left(-2\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \dot{r}\right)' - \frac{2GM}{r} \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-2} + 2r (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - \frac{2GM}{r} \dot{t}^2 = 0$$

$$L = \frac{ds^2}{ds^2} = 1 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\varphi}^2$$

$\uparrow$
 $\dot{\theta} = 0$

$\Rightarrow$ beírjuk J -t, E -t
 kifejezzük $\dot{r}^2$ -et

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 = \left[\frac{E}{2m} - \frac{m}{2}\right] + \frac{GMm}{r} - \frac{J^2}{2mr^2} + \frac{GMJ^2}{mr^3}$$

$\Rightarrow$ 1D mozgás az alábbi effektív potenciálban új tag relativisztikus korrekció

Newtoni pot. centrifug.
 ↓ ↓
 effektív potenciálban
 $V_{\text{eff}}(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{J^2}{2mr^2} - \frac{GMJ^2}{mr^3} \left(\frac{1}{c^2}\right)$

(9)

$$m=0 \quad \theta \rightarrow \theta = \pi/2$$

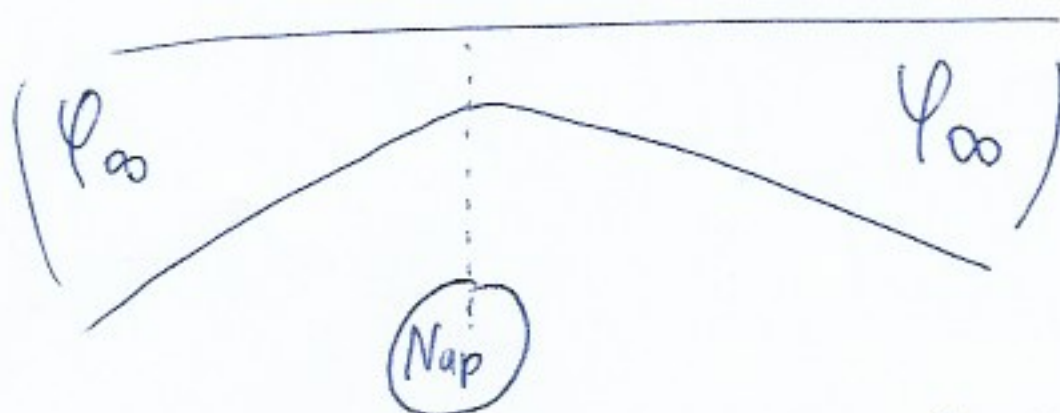
$$\varphi \rightarrow j = r^2 \dot{\varphi} = \text{konst.} \quad (\dot{}) = \frac{d}{d\sigma}(\dots)$$

$$t \rightarrow \epsilon = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \dot{t} = \text{konst.}$$

$$L = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\varphi}^2 \stackrel{\text{fény}}{=} 0$$

$$\Rightarrow \left| \dot{r}^2 = \epsilon^2 - j^2/r^2 + 2GM j^2/r^3 \right| \Rightarrow \text{fény pályája}$$

~~~~~  
 $\frac{1}{r^3}$ -ös tagban  
 pert. számítás  
 vagy  
 numerikusan



$$\left| \varphi_\infty(\text{Nap}) \approx 1.75' \right|$$

Eddington-kísérlet: 1919

teljes napfogyatkozás

(hátterében a csillagok láthatók)

legyenek (tul. fény a Nap)

a Nap ismert helyen lévő csillagok előtt  
 D tengelyes pozíció

Edthate  
 pozíció

Shapiro delay (időkéésés)

nem csak a fény

Irwin Shapiro 60-as évek  
 pályáját, hanem a haladásának idejét is

$$\frac{dt}{dr} = \frac{dt/d\sigma}{dr/d\sigma} = \frac{\epsilon}{1 - \frac{2GM}{r}}$$

$$\sqrt{\epsilon^2 - j^2/r^2 + 2GM j^2/r^3}$$

$$\text{eltelt idő} \int dt = \int \frac{\epsilon}{1 - \frac{2GM}{r}} \frac{dr}{\sqrt{\epsilon^2 - j^2/r^2 + 2GM j^2/r^3}}$$

rádiójel: Föld → Merkúr → Föld  
 közben a Nap grav. terében  
 → megmérhető az idő