

Ekvivalenciaelv, dlt. koord. transzformációk/rendszerek, geodetikusok

(1)

Newtoni mechanika

$$\vec{F}=0 \Rightarrow \vec{r} = \text{const.}$$

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = m \vec{a}$$

Galilei-trafók megőrzik alagot

Relat. mecha

$$F^M = 0 \Rightarrow u^M = \text{const}$$

$$F^M = \frac{dp^M}{ds} = mc \frac{du^M}{ds}$$

Lorentz-trafók

inerciarendszerben igazak

gyorsuló koord. r.: tehetetlenségi

erők (tang., centrifug., Coriolis, Euler)

súlyos tömeg: $m_g \vec{g}$

kísérlet $\Rightarrow$

tehetetlen tömeg: $m_t \vec{a}_{\text{teh.}}$

$$m = \boxed{m_t = m_g} \Rightarrow \text{Ekvivalenciaelv.}$$

Bemegítés (nemrelat.)

inerciarendszer grav. nélkül
 $m \vec{a} = \vec{F}_K(\vec{r})$

↓ nem-Galilei
trafó (gyorsuló r.)

$$m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{F}_K(\vec{r}') \quad \text{úaz mint}$$

eltüntethető $\vec{g}$

↑ nem-Galilei
trafó.

inerciarendszer $\vec{g}$ grav.
gyorsulással

Nem tudjuk eldönteni, hogy inerciarendszerben grav. erőt érzünk
vagy neminerciarendszerben tehetetlenségi erőt (grav. és teh. erő
nem megkülönböztethető)

Ha $\vec{g}(\vec{x}, t)$ akkor globálisan nem lehet ilyen trafót
csinálni, de lokálisan (olyan kis téridő-tér feletben ahol már
 $\vec{g}$ változása elhanyagolható) igen



"his cella"

→ lokális inerciarendszer
(sem grav. erő, sem teh. erő nem látszik)

Ekvivalenciaelv: tetszőleges grav. mezőben, tetszőleges tér-idő pontra $\exists$ egy lokális inerciarendszer: azaz egy olyan koord. r. ahol a mozgásegyenletek alakja olyan, mint egy nem gyorsuló grav. rendszerben grav. erő nélkül, az adott tér-időbeni pont kis környezetében

$\swarrow$ spec. rel.

$\Rightarrow$ a tér-idő egy olyan matematikai objektum, ami lokálisan Minkowski geometria: pseudo-Riemann sokaság

(ahol pseudo: Minkowski (nem Euklideszi))

$\Rightarrow$ általános koord. tr.-kat kell vizsgálni: nem-lineáris, gyorsuló, görbevonalú, ...

általános kovariancia: $\forall$ koord. tr. alatt őrizze meg alakját a fizika egyenletei

Példa: forgó koord. r. ($c=1$)

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad \text{trafó} \quad \begin{matrix} t=t' \\ z=z' \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow dx^2 + dy^2 = \overset{\substack{\uparrow \\ \cos^2 + \sin^2 = 1}}{dx'^2 + dy'^2} + \omega^2(x'^2 + y'^2)dt^2 + dx'dt(2\omega y') - dy'dt(2\omega x')$$

$$\Rightarrow ds^2 = [1 - \omega^2(x'^2 + y'^2)]dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 + 2\omega y' dx' dt' - 2\omega x' dy' dt'$$

általában $\boxed{ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu}$ ahol $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ metrikus tenzor

Később látni fogjuk, hogy ált. rel.-ben maga a $g_{\mu\nu}(x)$ is dinamikus mező lesz, de először meg kell kezelniük az ált. koord. tr.-k matematikáját

vektorok és tenzorok általános (nem-lineáris) koord. tr. esetén (3)

$x^M = x^M(x^0, x^1, x^2, x^3)$ koord. transzformációs fr. (NEM vektor)

kontravariáns négyesvektor példa: $dx^M = \frac{\partial x^M}{\partial x'^\nu} dx'^\nu$

$$\boxed{A^M = \frac{\partial x^M}{\partial x'^\nu} A'^\nu} \quad (\#)$$

kovariáns négyesvektor legyen skálármező $\phi(x) = \phi'(x')$

példa: $\partial_\mu \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial \phi'}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \partial'_\nu \phi'$

$$\boxed{A_\mu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} A'_\nu} \quad (*)$$

tenzorok: úgy transzformálódnak, mint vektorok szorzatai

$$A^{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} A'^{\rho\sigma}$$

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} A'_{\rho\sigma}$$

$$A^\mu{}_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} A'^\rho{}_\sigma \quad \text{stb.}$$

indexek fel/le

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu$$

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$$

$$A^\mu{}_\nu = g^{\rho\mu} A_{\rho\nu} \quad \text{stb.}$$

ahol $\boxed{g_{\mu\rho} g^{\rho\nu} = \delta_\mu^\nu}$ azaz $\cancel{g^{\mu\nu}}$ a $\cancel{g_{\mu\nu}}$ inverze

HF: Tfh. $A_\nu (*)$ szerint tráfódl. Biz. be. hogy $g^{\mu\nu} A_\nu (\#)$ szerint

Kovariáns deriválás Tfh. V^M vektormező, azaz $V^M = \frac{\partial x^M}{\partial x'^\nu} V'^\nu$

$$\Rightarrow \partial_\nu V^M = \frac{\partial V^M}{\partial x^\nu} = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x'^\rho} \left(\frac{\partial x^M}{\partial x'^\sigma} V'^\sigma \right) = \underbrace{\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^M}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial V'^\sigma}{\partial x'^\rho}}_{\text{így trafélna egy tenzor}} + \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu} \frac{\partial^2 x^M}{\partial x'^\rho \partial x'^\sigma} V'^\sigma$$

cél: olyan derivált, ami vektorból tenzort csinál

Legyen $\nabla_\nu V^M := \partial_\nu V^M + T^M_{\nu\sigma} V^\sigma$ egy tenzormező, azaz

$$\nabla_\nu V^M \stackrel{!}{=} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^M}{\partial x'^\sigma} (\nabla'_\rho V'^\sigma)$$

$$\partial_\nu V^M + T^M_{\nu\sigma} V^\sigma \stackrel{!}{=} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^M}{\partial x'^\sigma} (\partial'_\rho V'^\sigma + T'^\sigma_{\rho\kappa} V'^\kappa)$$

$$\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu} \frac{\partial^2 x^M}{\partial x'^\rho \partial x'^\sigma} V'^\sigma + T^M_{\nu\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\kappa} V'^\kappa \stackrel{!}{=} T'^\sigma_{\rho\kappa} V'^\kappa \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^M}{\partial x'^\sigma}$$

$$\forall V'^\kappa \Rightarrow \left[T^M_{\nu\lambda} = T'^\sigma_{\rho\kappa} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x^M}{\partial x'^\lambda} - \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu} \frac{\partial^2 x^M}{\partial x'^\rho \partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x'^\lambda} \right] \quad (a)$$

konvexió: bármi, ami így transzformálódik definiál egy kov. deriváltat

HF1 Biz. le, hogy (vigyázz: $\frac{\partial}{\partial x^M} \frac{\partial f}{\partial x'^\rho} \neq \frac{\partial}{\partial x'^\rho} \frac{\partial f}{\partial x^M}$)

$$T^M_{\nu\lambda} = T'^\sigma_{\rho\kappa} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x^M}{\partial x'^\lambda} + \frac{\partial x^M}{\partial x'^\rho} \frac{\partial^2 x'^\rho}{\partial x^\nu \partial x'^\lambda} \quad (b)$$

$$\nabla_\mu V_\nu := \partial_\mu V_\nu - \Gamma^\rho_{\mu\nu} V_\rho$$

(5)

HF: úgy definiáljuk mint 2 alsó indexes tenzor

$$\begin{aligned} \text{dltalában } \nabla_\mu T^{\alpha\beta}_{\gamma\delta} &= \partial_\mu T^{\alpha\beta}_{\gamma\delta} \\ &+ \Gamma^\alpha_{\mu\lambda} T^{\lambda\beta}_{\gamma\delta} + \Gamma^\beta_{\mu\lambda} T^{\alpha\lambda}_{\gamma\delta} \\ &- \Gamma^\lambda_{\mu\gamma} T^{\alpha\beta}_{\lambda\delta} - \Gamma^\lambda_{\mu\delta} T^{\alpha\beta}_{\gamma\lambda} \end{aligned}$$

Bármilyen (a), (b)-t kielégíti $\Rightarrow$ konnexió, és def. egy ∇_μ -t
DE: tovább kell konkretizálni, mert az ált. rel.-ben egy speciális $\Gamma^\alpha_{\mu\beta}$

Christoffel-szimbólumok két feltétel:

- (1) $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\nu\mu}$ (torziómentes) $\leftarrow$ egyszerűség (ha nem tesszük fel: Einstein-Guttman)
- (2) $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$ (metrika kompatibilis) $\leftarrow$ ekvivalenciaelv (lásd gravitáció később)

Oldjuk meg (1) és (2) feltételeket:

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\alpha} g_{\rho\nu} - \Gamma^\rho_{\nu\alpha} g_{\rho\mu}$$

$$= \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma_{\nu\mu\alpha} - \Gamma_{\mu\nu\alpha} \quad \left(\Gamma^\rho_{\nu\alpha} = g^{\rho\kappa} \Gamma_{\kappa\nu\alpha} \right)$$

$$\Rightarrow \partial_\alpha g_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu\alpha} + \Gamma_{\nu\mu\alpha} \quad (A) \text{ cihl. perm.} \quad \left(\Gamma_{\beta\gamma\alpha} = g_{\beta\kappa} \Gamma^\kappa_{\gamma\alpha} \right)$$

$$\partial_\mu g_{\nu\alpha} = \Gamma_{\nu\alpha\mu} + \Gamma_{\alpha\nu\mu} \quad (B)$$

$$\partial_\nu g_{\alpha\mu} = \Gamma_{\alpha\mu\nu} + \Gamma_{\mu\alpha\nu} \quad (C)$$

$$(A) + (B) - (C) = \partial_\alpha g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\alpha} - \partial_\nu g_{\alpha\mu} = 2 \Gamma_{\nu\mu\alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma_{\nu\mu\alpha} = \frac{1}{2} (\partial_\alpha g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\alpha} - \partial_\nu g_{\alpha\mu})}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma^\nu_{\mu\alpha} = \frac{1}{2} g^{\nu\rho} (\partial_\alpha g_{\rho\mu} + \partial_\mu g_{\rho\alpha} - \partial_\rho g_{\alpha\mu})}$$

Geodetikus egyenlet

$m > 0$ $\exists$ lokális inerciarendszer (y) ahol egy pont környezetén

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dy^\mu dy^\nu \quad \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+ - - -)$$

$$\frac{d^2 y^\mu}{ds^2} = 0$$

másik koord. rendszer (x): $0 = \frac{d^2 y^\mu}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{ds} \right)$

$$0 = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \frac{\partial^2 y^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds}$$

$$0 = \underbrace{\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu}}_{\delta_\alpha^\mu} \frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 y^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu}}_{\Gamma_{\alpha\beta}^\mu} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0 \right)$$

(arra a spec. esetre amikor $y \leadsto x$ lok. inerciarendszer)

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dy^\mu dy^\nu = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\beta} dx^\alpha dx^\beta = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\beta}$$

$m = 0$ Nem lehet s-el parametrizálni, mert az ívhosszelem $ds = 0$ végig. Valami más parametrizáción kell a görkének: σ (Lehet pl. $\sigma = y^0$)

Lokális inerciarendszer: $\frac{d^2 y^\mu}{d\sigma^2} = 0$ azaz a levezetés

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x^\alpha}{d\sigma^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \frac{dx^\beta}{d\sigma} &= 0 \\ g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\beta} \eta_{\mu\nu} \leftarrow (\text{lokális inerciare. (y)} \rightarrow x)$$

$$\partial_\sigma g_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left(\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\beta} \eta_{\mu\nu} \right) = \frac{\partial^2 y^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\sigma} \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\beta} \eta_{\mu\nu} + \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 y^\nu}{\partial x^\beta \partial x^\sigma} \eta_{\mu\nu}$$

$$= \frac{\partial^2 y^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\sigma} \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\beta} \delta_\mu^\rho \eta_{\rho\nu} + \frac{\partial^2 y^\nu}{\partial x^\beta \partial x^\sigma} \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha} \delta_\nu^\rho \eta_{\mu\rho}$$

$$= \frac{\partial^2 y^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\sigma} \left[\frac{\partial y^\nu}{\partial x^\beta} \frac{\partial y^\rho}{\partial x^\sigma} \right] \frac{\partial x^\delta}{\partial y^\mu} \eta_{\rho\nu} + \frac{\partial^2 y^\nu}{\partial x^\beta \partial x^\sigma} \left[\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial y^\rho}{\partial x^\sigma} \right] \frac{\partial x^\delta}{\partial y^\nu} \eta_{\mu\rho}$$

$$\nwarrow g_{\beta\sigma} \nearrow$$

$$\nwarrow g_{\alpha\sigma} \nearrow$$

$$= \Gamma_{\alpha\sigma}^\delta g_{\delta\beta} + \Gamma_{\beta\sigma}^\delta g_{\alpha\delta}$$

$$\Rightarrow \partial_\sigma g_{\alpha\beta} - \Gamma_{\alpha\sigma}^\delta g_{\delta\beta} - \Gamma_{\beta\sigma}^\delta g_{\alpha\delta} = 0$$

□

HIF2 $S' = -m ds = -m \int \sqrt{g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu}$
 $\delta S' = 0 \Rightarrow$ geodetikus egyenlet

geodetikus
egyenlet
variációs
levezetése

HIF3 $S' = \int ds g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds}$
 $\xrightarrow{\text{Euler-Lagrange}} \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0$

hasznos trükk, ha gyorsan le kell
vezetni a geodetikus egyenletet egy
adott metrikára

Megj.: $\frac{du^\alpha}{ds} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\beta u^\gamma = u^\beta \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\beta u^\gamma = u^\beta \nabla_\beta u^\alpha = 0$ tömörebb
 alak

New relativitás mozgás grav. potenciálban

$$S' \cong \int dt \left[-mc^2 + \frac{m\vec{v}^2}{2} - m\phi \right] \stackrel{!}{=} -mc \int ds$$

$$\Rightarrow ds \cong \left(c - \frac{\vec{v}^2}{2c} + \frac{\phi}{c} \right) dt$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow ds^2 &= (c^2 + 2\phi) dt^2 - \vec{v}^2 dt^2 + O\left(\frac{1}{c}\right) \\ &= (c^2 + 2\phi) dt^2 - d\vec{x}^2 + O\left(\frac{1}{c}\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^3}\right)} \text{ és } \boxed{g_{ij} \cong -\delta_{ij} + O\left(\frac{1}{c}\right)}$$

Coriolis-erő forgó koord. r.:

$$ds^2 = (1 - \omega^2(x^2 + y^2)) dt^2 - d\vec{x}^2 + 2\omega y dx dt - 2\omega x dy dt$$

$$\Rightarrow g_{tt} = 1 - \omega^2(x^2 + y^2)$$

$$g_{xx} = g_{yy} = g_{zz} = -1$$

$$g_{xt} = g_{tx} = \omega y$$

$$g_{yt} = g_{ty} = -\omega x$$

pl.: $\Pi_{ttx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{xt}}{\partial t} + \frac{\partial g_{tt}}{\partial x} - \frac{\partial g_{tx}}{\partial t} \right) = -\omega^2 x$ stb.

$\Rightarrow$
HR

$$\frac{d^2 t}{ds^2} = 0$$

$$\frac{d^2 x}{ds^2} = \omega^2 x \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + 2\omega \frac{dy}{ds} \frac{dt}{ds}$$

$$\frac{d^2 y}{ds^2} = \omega^2 y \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 - 2\omega \frac{dx}{ds} \frac{dt}{ds}$$

$$\frac{d^2 z}{ds^2} = 0$$

$\Rightarrow$
nemrel. lineár ($dt=ds$)

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \omega^2 x + 2\omega \dot{y} \\ \ddot{y} &= \omega^2 y - 2\omega \dot{x} \end{aligned}$$

centrifugális
Coriolis
 $2(\vec{v} \times \vec{\omega}) = 2 \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -\omega \dot{y} \\ \omega \dot{x} \\ 0 \end{pmatrix}$

invariáns térfogatelem

(9)

szükséges, hogy térelmélethez (pl. eldin) általánosítani tudjunk
tetszőleges metrikus tenzorra

$$dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = J dx'^0 dx'^1 dx'^2 dx'^3 \quad \text{ahol} \quad J = \left| \det \frac{\partial x}{\partial x'} \right|$$

másfelől $g_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} g'_{\rho\sigma}$

$$\Rightarrow \det |g| = \left| \det \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^2 \det |g'|$$

jelölés $y \equiv \det g$

$$\Rightarrow \sqrt{-g} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = \sqrt{-g'} dx'^0 dx'^1 dx'^2 dx'^3$$

↑
Minkowski

$$\boxed{\sqrt{-g} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3}$$

invariáns
térfogatelem

$\Rightarrow$ skálarmező

skálarmezőre $\partial_\mu = \nabla_\mu$

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi)(\partial_\nu \phi) - V(\phi) \right]$$

HF

E-L

$$\boxed{\nabla^\nu \nabla_\nu \phi + V'(\phi) = 0}$$

(általános reopt:
 $\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$
minimal coupling)

elektrodinamika

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$$

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{\epsilon_0}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - A_\mu j^\mu \right]$$

HF6

$$\boxed{\nabla_\mu F^{\mu\nu} = -\frac{1}{\epsilon_0} j^\nu}$$

faradok

$$\nabla_\alpha F_{\beta\gamma} + \nabla_\beta F_{\gamma\alpha} + \nabla_\gamma F_{\alpha\beta} = 0$$

menter

$$\boxed{\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0}$$