

Ekvivalenciaelv, általános koord. transzformációk/rendszerek

①

Newtoni mechanika

$$\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \text{const.}$$

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = m\vec{a}$$

Galilei-trafó megőrzik alakját

Relat. mecha

$$F^M = 0 \Rightarrow u^M = \text{const.}$$

$$F^M = \frac{dp^M}{ds} = mc \frac{du^M}{ds}$$

Lorentz-trafó

inerciarendszerben

igazak

gyorsuló koord. rendszerekben: tehetetlenségi erők
(tang., centifug., Coriolis, Euler)

tehetetlen tömeg: $m_t \vec{a}_{\text{ten}}$ kísérlet
súlyos tömeg: $m_g \vec{g}$ $\Rightarrow m = \boxed{m_t = m_g} (*)$

(*) $\Rightarrow$ Ekvivalenciaelv

"Bemelegítés" (nem relat.)

inercia rendszer grav. nélkül

$$m\vec{a} = \vec{F}_K(\vec{r})$$

↓ nem-Galilei trafo

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_K(\vec{r})$$

gyorsuló rendszerben

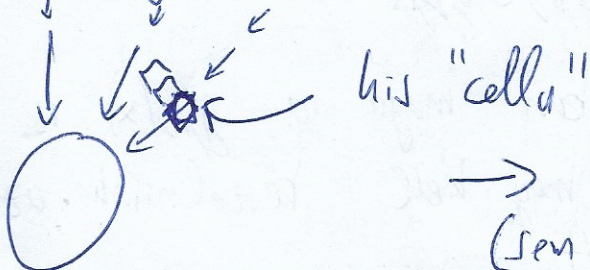
eltüntethető $\vec{g}$

↑ nem-Galilei trafo

úgy mint inerciarendszer $\vec{g}$ grav.

Grav. és teh. erő nem megkülönböztethető! gyorsulással

Ha $\vec{g}(\vec{x}, t)$ akkor globálisan nem lehet ilyen traft csinálni, de lokálisan (olyan kis téridőterfogatban ahol már $\vec{g}_K$ változás elhanyagolható) igen



→ lokális inerciarendszer

(sem grav. erő, sem teh. erő nem látszik benne)

Ehrlichman elv: tetőzőleges grav. mezőben, tetőzőleges tér-idő pont.

$\exists$ egy lokális inerciarendszer, azaz egy olyan koord. r., ahol a mozgásegyenletek alakja, mint egy nem gyorsuló koord. r.-ben grav. erők nélkül, az adott tér-időbeni pont kis környezetében

$\uparrow$ spec. rel.

$\Rightarrow$ a tér-idő egy olyan matematikai objektum, ami lokálisan Minkowski geom.: pseudo-Riemann sokaság ahol pseudo: Minkowski (nem Euklideszi)

$\Rightarrow$ ~~általános~~ ^{általános} koord. tr.-kat kell vizsgálni: nem-lineáris, gyorsuló, görbe vonal, ...
(általános kovariánciák $\forall$ koord. tr. alatt őrzik meg az egyenleteket)

Példa: forgó koord. rendszer

$$[C=1]$$

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

$$\text{trafó: } t=t' \\ z=z'$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow dx = dx' \cos(\omega t) + x' (-\sin(\omega t)) \omega dt - dy' \sin(\omega t) - y' (\cos(\omega t)) \omega dt$$

$$dy = dx' \sin(\omega t) + x' (\cos(\omega t)) \omega dt + dy' \cos(\omega t) + y' (-\sin(\omega t)) \omega dt$$

$$\Rightarrow dx^2 + dy^2 \stackrel{\substack{\uparrow \\ \cos^2 + \sin^2 = 1}}{=} dx'^2 + dy'^2 + dt^2 \omega^2 (x'^2 + y'^2) + dx' dt 2\omega y' - dy' dt 2\omega x'$$

$$\Rightarrow ds^2 = [1 - \omega^2 (x'^2 + y'^2)] dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 + 2\omega y' dx' dt' - 2\omega x' dy' dt'$$

$\Rightarrow$ általában

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$$

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$$

Később látni fogjuk, hogy ált. rel.-ben maga a $g_{\mu\nu}(x)$ is dinamikus mező lesz. De először meg kell beszélünk az általános koord. tr.-k matematikáját.

vektorek és tenzorek általános (nem-lin.) koord. tr. esetén

(3)

$$x^M = x^M(x^{10}, x^{11}, x^{12}, x^{13})$$

koordináta transzformációs fr.
NEM VEKTOR

kontrav. négyvektor

példa: $dx^M = \frac{\partial x^M}{\partial x^{1\nu}} dx^{1\nu}$

$$A^M = \frac{\partial x^M}{\partial x^{1\nu}} A^{1\nu} \quad (\#)$$

kovar. négyvektorek

legyen skálármező $\phi(x) = \phi'(x')$

példa: $\partial_\mu \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x^{1\nu}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \phi'}{\partial x^{1\nu}}$

$$A_\mu = \frac{\partial x^{1\nu}}{\partial x^\mu} A'_{1\nu} \quad (*)$$

tenzorek: ugy tráfodnak mint vektorek szorzatai

$$A^{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{1\rho}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{1\sigma}} A^{1\rho\sigma}$$

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{1\rho}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^{1\sigma}}{\partial x^\nu} A_{1\rho\sigma} \quad \leftarrow \text{a metrikus tenzor } g_{\mu\nu}(x) \text{ ilyen}$$

$$A^\mu{}_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{1\rho}} \frac{\partial x^{1\sigma}}{\partial x^\nu} A^\rho{}_\sigma$$

indexek fel/le húzása:

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu$$

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$$

$$A^\mu{}_\nu = g^{\rho\mu} A_{\rho\nu} \quad \text{stb.}$$

ahol $\boxed{g_{\mu\rho} g^{\rho\nu} = \delta_\mu^\nu}$ azaz $g^{\mu\nu}$ a $g_{\mu\nu}$ inverze

HIF: Tfh. A_ν (*) szerint tráfodik.

Biz. be, hogy $g^{\mu\nu} A_\nu$ akkor (#) szerint tráfodik

Kovariáns deriválás Tfh. V^M vektormező, azaz $V^M = \frac{\partial x^M}{\partial x^\nu} V'^\nu$

$$\Rightarrow \partial_\nu V^M = \frac{\partial V^M}{\partial x^\nu} = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x'^\rho} \left(\frac{\partial x^M}{\partial x'^\sigma} V'^\sigma \right) = \underbrace{\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^M}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial V'^\sigma}{\partial x'^\rho}}_{\text{így trafédna egy tenzor}} + \underbrace{\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu} \frac{\partial^2 x^M}{\partial x'^\rho \partial x'^\sigma}}_{\text{⚡}}$$

szeretnénk olyan deriváltat, amely vektorból tenzort csinál

Legyen $\nabla_\nu V^M := \partial_\nu V^M + \Gamma^M_{\nu\sigma} V^\sigma$ egy tenzor, azaz

$$\nabla_\nu V^M \stackrel{!}{=} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^M}{\partial x'^\sigma} (\nabla'_\rho V'^\sigma)$$

$$\partial_\nu V^M + \Gamma^M_{\nu\sigma} V^\sigma \stackrel{!}{=} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^M}{\partial x'^\sigma} (\partial'_\rho V'^\sigma + \Gamma'^{\sigma}_{\rho\kappa} V'^\kappa)$$

$$\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu} \frac{\partial^2 x^M}{\partial x'^\rho \partial x'^\kappa} V'^\kappa + \Gamma^M_{\nu\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\kappa} V'^\kappa \stackrel{!}{=} \Gamma'^{\sigma}_{\rho\kappa} V'^\kappa \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^M}{\partial x'^\sigma}$$

$\forall V'^\kappa$ -re

$$\Rightarrow \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\lambda}$$

$$\Gamma^M_{\nu\lambda} = \Gamma'^{\sigma}_{\rho\kappa} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^M}{\partial x'^\sigma} - \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu} \frac{\partial^2 x^M}{\partial x'^\rho \partial x'^\kappa} \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\lambda} \quad (a)$$

A második tagot dt lehet átalakítani: (vigyázz: $\frac{\partial}{\partial x^M} \frac{\partial f}{\partial x'^\sigma} \neq \frac{\partial}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial f}{\partial x^M}$)

$$- \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu} \frac{\partial^2 x^M}{\partial x'^\rho \partial x'^\kappa} \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\lambda} = - \left(\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x'^\sigma} \left(\frac{\partial x^M}{\partial x'^\rho} \right) \right) =$$

$$= - \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left(\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^M}{\partial x'^\rho} \right) + \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \frac{\partial x^M}{\partial x'^\rho}$$

$$= \delta^\mu_\nu$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{=0}$$

$$\Rightarrow \Gamma^M_{\nu\lambda} = \Gamma'^{\sigma}_{\rho\kappa} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^M}{\partial x'^\sigma} + \frac{\partial x^M}{\partial x'^\rho} \frac{\partial^2 x'^\rho}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \quad (b)$$

bdm, ami így
trafédik def. egy
kov. deriváltat

Def.: $\nabla_\mu V_\nu := \partial_\mu V_\nu - \Gamma^\rho_{\mu\nu} V_\rho$

HF: úgy trafa, mint 2 alsó indexű tenzor

Tenzorokra: $\nabla_\mu T^{\alpha\beta}_{\gamma\delta} = \partial_\mu T^{\alpha\beta}_{\gamma\delta} + \Gamma^\alpha_{\mu\lambda} T^{\lambda\beta}_{\gamma\delta} + \Gamma^\beta_{\mu\lambda} T^{\alpha\lambda}_{\gamma\delta} - \Gamma^\lambda_{\mu\gamma} T^{\alpha\beta}_{\lambda\delta} - \Gamma^\lambda_{\mu\delta} T^{\alpha\beta}_{\gamma\lambda}$

bármely $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ ami kielégíti az (a) és (b) trafa szabályokat (konnektív) $\Rightarrow$ kov. deriv.

de ezt még tovább kell konkretizálni, mert alt. rel.-ben egy specielis $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ -t használunk

Christoffel-szimbólumok két feltétellel: (1) $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\nu\mu}$ (metrika (torziómentes))
(2) $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$ (~~kompatibilis~~)

Oldjuk meg (1) és (2) feltételeket:

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0 &= \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\alpha\mu} g_{\rho\nu} - \Gamma^\rho_{\alpha\nu} g_{\rho\mu} \\ &= \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma_{\nu,\mu\alpha} - \Gamma_{\mu,\nu\alpha} \end{aligned} \quad \text{ahol } \Gamma^\rho_{\nu\alpha} = g^{\rho\kappa} \Gamma_{\kappa\nu\alpha}$$

$$\Rightarrow \partial_\alpha g_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu,\nu\alpha} + \Gamma_{\nu,\mu\alpha} \quad (A) \quad \text{cikk. perm.:}$$

$$\partial_\mu g_{\nu\alpha} = \Gamma_{\nu,\alpha\mu} + \Gamma_{\alpha,\nu\mu} \quad (B)$$

$$\partial_\nu g_{\alpha\mu} = \Gamma_{\alpha,\mu\nu} + \Gamma_{\mu,\alpha\nu} \quad (C)$$

$$(A) + (B) - (C) = \partial_\alpha g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\alpha} - \partial_\nu g_{\alpha\mu} = 2 \Gamma_{\nu,\mu\alpha}$$

$$\Rightarrow \Gamma_{\nu,\mu\alpha} = \frac{1}{2} (\partial_\alpha g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\alpha} - \partial_\nu g_{\alpha\mu}) \Rightarrow \Gamma^\nu_{\mu\alpha} = \frac{1}{2} g^{\nu\rho} (\partial_\alpha g_{\rho\mu} + \partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\nu g_{\alpha\rho})$$

Integrálás / invariáns térfogat elem

$$dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = J dx'^0 dx'^1 dx'^2 dx'^3 \quad \text{ahol } J = \left| \det \frac{\partial x}{\partial x'} \right|$$

$$\text{másképp } g_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} g'_{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow \det(g) = \left| \det \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^2 \det(g')$$

jelölés $g \equiv \det g$

$$\Rightarrow \sqrt{-g'} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = \sqrt{-g'} dx'^0 dx'^1 dx'^2 dx'^3$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{Minkowski}}$

$$\boxed{\sqrt{-g'} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3}$$

invariáns
térfogat elem

variációs egyenlet
 $[C=1]$

szabad részre mozgás általában
 $g_{\mu\nu}(x)$ metrika esetén

(7)

$$S' = -m \int ds = -m \int \sqrt{g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu} \Rightarrow \delta S' = -m \int \frac{\delta(ds^2)}{2ds}$$

$$\delta ds^2 = 2ds \delta ds = \delta(g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu) = dx^\mu dx^\nu (\partial_\rho g_{\mu\nu}) \delta x^\rho + 2g_{\mu\nu} dx^\mu d\delta x^\nu$$

$$\delta S' = -m \int \left[\frac{1}{2} u^\mu u^\nu \partial_\rho g_{\mu\nu} \delta x^\rho + g_{\mu\nu} u^\mu \frac{d}{ds} \delta x^\nu \right] ds$$

$$\uparrow \frac{dx^\mu}{ds} = u^\mu \Rightarrow \delta S' = -m \left[\frac{1}{2} u^\mu u^\nu \partial_\rho g_{\mu\nu} - \frac{d}{ds} (g_{\mu\rho} u^\mu) \right] \delta x^\rho ds$$

part.
int.

$\delta x^\mu = 0$ végpontokban

$$0 = \frac{1}{2} u^\mu u^\nu \partial_\rho g_{\mu\nu} - \frac{d}{ds} (g_{\mu\rho} u^\mu) = \frac{1}{2} u^\mu u^\nu \partial_\rho g_{\mu\nu} - g_{\mu\rho} \frac{du^\mu}{ds} - u^\mu u^\nu \partial_\nu g_{\mu\rho}$$

$$= \frac{1}{2} u^\mu u^\nu \partial_\rho g_{\mu\nu} - g_{\mu\rho} \frac{du^\mu}{ds} - u^\mu u^\nu \frac{1}{2} (\partial_\nu g_{\mu\rho} + \partial_\mu g_{\nu\rho})$$

↑ szimmetrizálás (utolsó tag)

$$\Rightarrow g_{\mu\rho} \frac{du^\mu}{ds} + u^\mu u^\nu \frac{1}{2} (\partial_\nu g_{\mu\rho} + \partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu})$$

T_{S,μν}

$$\Rightarrow \boxed{g_{\mu\rho} \frac{du^\mu}{ds} + T_{S,\mu\nu} u^\mu u^\nu = 0} \Rightarrow \boxed{\frac{du^\sigma}{ds} + T^\sigma_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 0}$$

Nemrelativisztikus mozgás grav. potenciálban?

$$S \approx \int dt \left(-mc^2 + \frac{mv^2}{2} - m\phi \right) \stackrel{!}{=} -mc \int ds$$

$$\Rightarrow ds \approx \left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\phi}{c} \right) dt$$

$$\Rightarrow ds^2 \approx (c^2 + 2\phi) dt^2 - (v^2 dt)^2 + O\left(\frac{1}{c}\right) \\ = (c^2 + 2\phi) dt^2 - d\vec{x}^2 + O\left(\frac{1}{c}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{g_{00} \approx 1 + 2\phi/c^2 + O(1/c^3)}$$

$$\text{és } \boxed{g_{ij} \approx -\delta_{ij} + O(1/c^2)}$$

ez a levezetés már
rendben mondja meg

Vigyázz!

+ O(1/c^2)
nem lehet így
meghúzni, hiába
azonos rendű,
mert ds-ban,
alagsabb rendű

Coriolis-erő korábbi példa: forgó koord. r.

$$ds^2 = [1 - w^2(x^2 + y^2)] dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 + 2wy dx dt - 2wx dy dt$$

$$g_{tt} = 1 - w^2(x^2 + y^2)$$

$$g_{xx} = g_{yy} = g_{zz} = -1$$

$$g_{xt} = g_{tx} = wy$$

$$g_{yt} = g_{ty} = -wx$$

pl.: $T_{t,tx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{xx}}{\partial t} + \frac{\partial g_{tt}}{\partial x} - \frac{\partial g_{tx}}{\partial t} \right) = -w^2 x$
stb.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{d^2 t}{ds^2} &= 0 \\ \frac{d^2 x}{ds^2} &= w^2 x \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + 2w \frac{dy}{ds} \frac{dt}{ds} \\ \frac{d^2 y}{ds^2} &= w^2 y \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 - 2w \frac{dx}{ds} \frac{dt}{ds} \\ \frac{d^2 z}{ds^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$
nemrel.
limit $dt = ds$

centrifugális

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = w^2 x + 2w \frac{dy}{dt}$$

Coriolis

$$2(\vec{v} \times \vec{w}) = 2 \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} v_y w \\ -v_x w \\ 0 \end{pmatrix}$$

feladat: skalarmező általános $g^{\mu\nu}$ mellett

(9)

$$S' = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi) (\partial_\nu \phi) - V(\phi) \right]$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -\sqrt{-g} V'(\phi) = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) + V'(\phi) = 0}$$

Állítás: $\nabla_\mu V^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} V^\mu)$

Biz: $\nabla_\mu V^\mu = \partial_\mu V^\mu + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} V^\lambda$

$$\Gamma^\mu_{\mu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} (\partial_\mu g_{\lambda\rho} + \partial_\lambda g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\lambda\mu}) = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \partial_\lambda g_{\mu\rho}$$

másképp $\partial_\lambda \sqrt{-g} = \frac{1}{2\sqrt{-g}} (\partial_\lambda g) = \sqrt{-g} \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\lambda g_{\mu\nu}$

$$\left. \begin{aligned} (\ln \det M)' &= (\text{tr} \log M)' = \text{tr} (M^{-1} M') \\ (\ln \det M)' &= \frac{1}{\det M} (\det M)' \end{aligned} \right\} (\det M)' = \det M \text{tr} (M^{-1} M')$$

$$\Rightarrow \Gamma^\mu_{\mu\lambda} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\lambda \sqrt{-g} \Rightarrow \nabla_\mu V^\mu = \partial_\mu V^\mu + \frac{1}{\sqrt{-g}} (\partial_\lambda \sqrt{-g}) V^\lambda = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\lambda (\sqrt{-g} V^\lambda)$$

(skálár $\nabla_\mu \phi \equiv \partial_\mu \phi$)

$$\Rightarrow \nabla_\mu (g^{\mu\nu} \nabla_\nu \phi) + V'(\phi) = 0$$

$$g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi + V'(\phi) = 0$$

$$\nabla^\mu \nabla_\mu \phi + V'(\phi) = 0$$

Általános recept:

$$\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$$

minimal coupling

(10)

HF: Maxwell-egyenletek dlt. $g_{\mu\nu}$ -re
 (megoldás: Landau II) $\leftarrow \boxed{\S 90}$ (HF)

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$$

de: $\nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu \stackrel{m_{\uparrow}}{=} \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\gamma\beta}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}) = \nabla_\mu F^{\mu\nu} = -\frac{1}{\epsilon_0} j^\nu \quad \text{források}$$

$$\nabla_\alpha F_{\beta\gamma} + \nabla_\beta F_{\gamma\alpha} + \nabla_\gamma F_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{források}$$

$$\Downarrow$$

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0$$

$$\nabla_\mu j^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} j^\mu) = 0 \quad \text{kontinuitás}$$