

SPEC. REL. ÁTTEKINTÉS

(1)

Relativitás elve: A fizika törvényei $\forall$ hoord. r.-ben azonosak.
A különböző hoord. rre.-ekben felírt egyenletek alája azonos.

kísérlet $\Rightarrow c = \text{inv.}$ spec. rel.

Fénysebességet invarianusan tartó lineáris koord.
(vagy ehiv.: ds^2 -et)

- tér- és időtükrözés
- tér- és időbeli eltolás
- 3D forgatások
- Lorentz-boost

$c = \text{inv.} \Leftrightarrow ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 = \text{inv.}$

tr.: ds^2 előjele $\rightarrow$ fénysebesség

absz. múlt és absz. jövő

tervörvény

Lorentz-trafók

A tárgy egyik fő témája az volt, hogyan lehet a relativitás elvét implementálni Lorentz-trafók esetén, azaz hogyan lehet olyan mozgásegyenleteket "győrtani", amelyek alája azonos Lorentz-trafók után.

Ebben segít, ha olyan "alkatrészeket" használunk, amelyek Lorentz-trafók alatt jól definiáltak trafódnak

skalár $S = S'$

kontravariáns vektor $V^M = \Lambda^M_{\nu} V'^{\nu}$
pl.: $x^M = (ct, \vec{x})$

kovariáns vektor $V_M = \Lambda_M^{\nu} V'_{\nu}$
pl.: $x_M = \eta_{M\nu} x^{\nu}$

ahol $\Lambda^M_{\rho} \Lambda_M^{\sigma} = \delta^{\sigma}_{\rho}$

tenzor $T_{M\nu} = \Lambda_M^{\rho} \Lambda_{\nu}^{\sigma} T'_{\rho\sigma}$
 $T^M_{\nu} = \Lambda^M_{\rho} \Lambda_{\nu}^{\sigma} T'^{\rho}_{\sigma}$ stb.

skalármező $S(x) = S'(x')$

vektormező $V^M(x) = \Lambda^M_{\nu} V'^{\nu}(x')$
pl.: $\partial_M S \equiv \frac{\partial}{\partial x^M} S$

$V_M(x) = \Lambda_M^{\nu} V'_{\nu}(x')$

tenzormező $T_{M\nu}(x) = \Lambda_M^{\rho} \Lambda_{\nu}^{\sigma} T'_{\rho\sigma}(x')$
stb.

ahol M^μ_ν a Lorentz-transzformációs mátrixa:

időtűlrögzítés $\text{diag}(-1, 1, 1, 1)$

tértűlrögzítés $\text{diag}(1, -1, -1, -1)$

xy síkban forgatás

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

x-borot

$$\begin{pmatrix} \cosh\chi & \sinh\chi & 0 & 0 \\ \sinh\chi & \cosh\chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ahol a rapiditás:
 $\tanh\chi = v/c$

illetve, még általánosabban a mennyiségek transzformálhatók valamilyen ábrázolás szerint, ebből egyet tanultunk

Dirac-spinor

$$\Psi_\alpha = R_{\alpha\beta}(\Lambda) \Psi_\beta$$

ahol $R^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu R(\Lambda) = \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu$

és $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$

Dirac-mátrixok/gamma-mátrixok

(Dirac)-spinormező

$$\Psi_\alpha(x) = R_{\alpha\beta}(\Lambda) \Psi_\beta(x')$$

kétféle módon tudunk relatív. inv. egyenleteket felírni

← közvetlenül (kovariáns egyenletek)

jobb oldal és bal oldal

azonosan transzformál

(pl.: mindkettő skalar)

vagy mindkettő első indexes tenzor
vagy -1- két első indexes tenzor stb.)

→ variációs elvből

ha ezekből az alkatrészekből olyan hatást rakunk össze, ami Lorentz-skalar, akkor az Euler-Lagrange-egyenletek automatikusan

[C=1] PONTMECHANIKA $\mathcal{L}' = \int dt L$

$$\mathcal{L}' = -m \int ds = -m \int \sqrt{1 - v^2/c^2} dt = \int dt L$$

átlagos impulzus: $\vec{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}} = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

energia: $E = \vec{p} \cdot \vec{v} - L = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$

négyszeresesség $u^\mu = \partial(1, \vec{v}) \quad \gamma = \frac{1}{1 - v^2/c^2}$

négyszeres impulzus $p^\mu = m u^\mu = (E/c, \vec{p})$

férdő eltérő invariancia mozgásegyenlet: $u^\mu = \text{konst.}$

$\Rightarrow$ négyszeres impulzus megm. (a)

$u_\mu u^\mu = 1 \Rightarrow [p_\mu p^\mu = m^2] \quad \frac{\text{tömeg négyzetét}}{\text{feltétel (b)}}$

(a) és (b) $\Rightarrow$ bomlások, ütközések stb. kinematikája

impulzusmomentum $\mathcal{G}^{\mu\nu} = \sum_i (x_i^\mu p_i^\nu - x_i^\nu p_i^\mu)$

Lorentz inv. $\Rightarrow$ megm. $\begin{pmatrix} 0 & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ -g_{01} & 0 & g^2 & -g^y \\ -g_{02} & -g^2 & 0 & g^x \\ -g_{03} & g^y & -g^x & 0 \end{pmatrix}$

$\mathcal{G}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ -g_{01} & 0 & g^2 & -g^y \\ -g_{02} & -g^2 & 0 & g^x \\ -g_{03} & g^y & -g^x & 0 \end{pmatrix}$ tömegpont indexe

$\vec{g} = (g^x, g^y, g^z) \leftarrow 3D$ impulzusmomentum

$\vec{J} = (J^1, J^2, J^3)$ is megm.

$\Rightarrow$ TKP egyenletes mozgást végez

TÉRELMELET

valós skálár $\mathcal{L}' = \int d^4x [\partial_\mu \phi] (\partial^\mu \phi) - V(\phi)$

komplex skálár $\mathcal{L}' = \int d^4x [\partial_\mu \phi] (\partial^\mu \phi^*) - V(\phi, \phi^*)$

elektrodinamika $\mathcal{L}'_{EM} = \int d^4x \left[-\frac{e_0}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - A_\mu j^\mu \right]$

Dirac-mező $\mathcal{L}' = \int d^4x \bar{\psi} [i \partial^\mu (\partial_\mu - ie A_\mu) - m] \psi$

Noether-tétel: $\Rightarrow$ megmaradó áram

Folytonos globális szimmetria $\Rightarrow \partial_\mu j^\mu = 0$

spec. eset: Lorentz-szimmetria $\Rightarrow$ energia-impulzus tenzor

$\Rightarrow \mathcal{T}^{\mu\nu} = \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_k)} (\partial^\nu \phi_k) - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} (*)$

$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_k)} (\partial^\nu \phi_k) - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} (*)$

$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_k)} (\partial^\nu \phi_k) - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} (*)$

négyszeres impulzus: $P^\mu = \int d^3x T^{0\mu}$

T^{0i} : energiadensitás sűrűsége T^{ij} : impulzusáram sűrűsége

impulzusmomentum $\mathcal{G}^{\mu\nu} = \int d^3x (x^\mu T^{0\nu} - x^\nu T^{0\mu})$

feltétele, hogy $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$, ami (*)-ből nem következik automatikusan, de

$T^{\mu\nu} \rightarrow T^{\mu\nu} + \partial_\rho \Lambda^{\rho\mu\nu}$ ahol $\Lambda^{\rho\mu\nu} = -\Lambda^{\mu\rho\nu}$ -vel szimmetrizálható

HIDRODINAMIKA

$u^\mu(x)$ négysebesség mező (párhuzamosított lokális együttes mező)

koord. v. sebessége a LAB-rendszerben

nyomás P } pld. lok. egy. m. energiasűrűség ρ } r.-ben def. részecskeáramlás j } (reális - antireális)

$T^{\mu\nu} = (\rho + P) u^\mu u^\nu - P \eta^{\mu\nu}$

perfekt $\sim$ folyadék $\sim$ rögfőny ettől a léptéktől függően és impulzus megm.

$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow$ relativizált Euler-egyenlet

relativizált megm.

$\partial_\mu (n u^\mu) = 0$

Megj: hatáselvből is lehet, de sokkal kevesebb terméket, Ahit érdekel:

Bird Tomás: Variációs elv a fizika alaptörvényeiben

Példák: ponttöltések + EM mező

$$\int_{S_2} + \int_{EM} + \int_{kh}$$

$$\int_{kh} = -Q \int A_M dx^M$$

$$\Rightarrow \text{Lorentz-erő}$$

pl.: magnetohidrodinamika

egés uniform elektromos térben

FELADATOK

$$\dot{p}_x = QE$$

$$\dot{p}_y = 0$$

$$\text{legyen } p_z = 0$$



$$\text{és legyen } x(0) = y(0) = z(0) = 0$$

$$p_x = QEt$$

$$p_y = p_0$$

$$E_0 = \sqrt{m^2 c^4 + p_0^2 c^2}$$

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + p_x^2 c^2 + p_y^2 c^2} = \sqrt{E_0^2 + c^2 (QEt)^2}$$

$$\Rightarrow v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{p_x c^2}{E} = \frac{QEt c^2}{\sqrt{E_0^2 + (cQEt)^2}} \Rightarrow x = \frac{1}{QE} \sqrt{E_0^2 + (cQEt)^2}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{p_y c^2}{E} = \frac{p_0 c^2}{\sqrt{E_0^2 + (cQEt)^2}} \Rightarrow y = \frac{p_0 c}{QE} \operatorname{arsh} \frac{cQEt}{E_0}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (\operatorname{arsh}(x))'$$

trajektória: x-et kifejezzük y-al

$$\sinh \frac{QE y}{p_0 c} = \frac{cQEt}{E_0} \Rightarrow (cQEt)^2 = E_0^2 \left(\sinh \frac{QE y}{p_0 c} \right)^2$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{QE} E_0 \sqrt{1 + \left(\sinh \frac{QE y}{p_0 c} \right)^2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{E_0}{QE} \cosh \left(\frac{QE y}{p_0 c} \right)} \quad \text{longgőle}$$

Nem relat. limit: $v \ll c$ $p_0 = m v_0$ $E_0 = m c^2$

$$x \approx \frac{m c^2}{QE} \cosh \left(\frac{QE y}{m v_0 c} \right) \approx \frac{QE}{2 m v_0^2} y^2 + \text{const.}$$

↑ nem-relat. eredmény
(parabola)

szögletes uniform mágneses térben

$$\dot{\vec{p}} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

$$\vec{p} = E \vec{v} / c^2$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{E} 2 \vec{p} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{1}{E} \vec{p} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{p}} = \frac{E}{c^2} \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q c^2}{E} \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\vec{v} \parallel \vec{p} \perp \frac{d\vec{p}}{dt}$$

legyen $\vec{B} = (0, 0, B)$

$$\Rightarrow \dot{v}_x = \omega v_y \quad (1)$$

$$\dot{v}_y = -\omega v_x \quad (2)$$

$$\dot{v}_z = 0$$

ahol $\omega = \frac{q c^2 B}{E}$

$$(1) + i(2) = \dot{v}_x + i \dot{v}_y = -i \omega (v_x + i v_y) \Rightarrow v_x + i v_y = v_0 e^{-i(\omega t + \alpha)}$$

$$v_x = v_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

$$v_y = -v_0 \sin(\omega t + \alpha)$$

ahol $v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \text{const.}$

α = kezdeti szög

$$\Rightarrow x = x_0 + r \sin(\omega t + \alpha)$$

$$r = \frac{v_0}{\omega} = \frac{v_0 E}{q c^2 B}$$

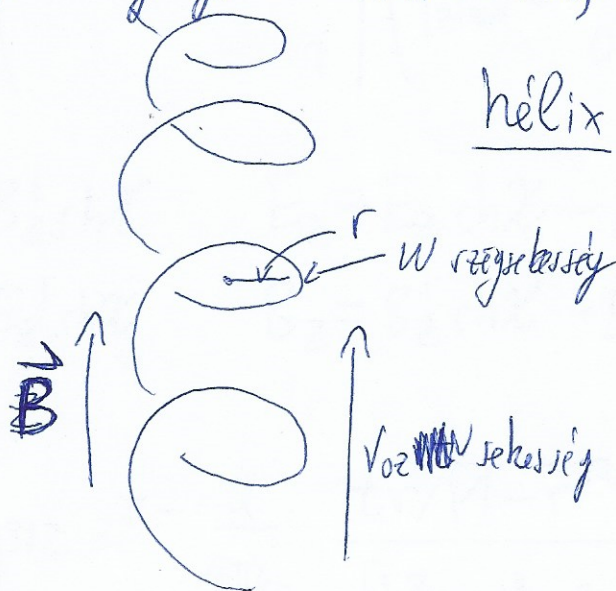
$$y = y_0 + r \cos(\omega t + \alpha)$$

hélix

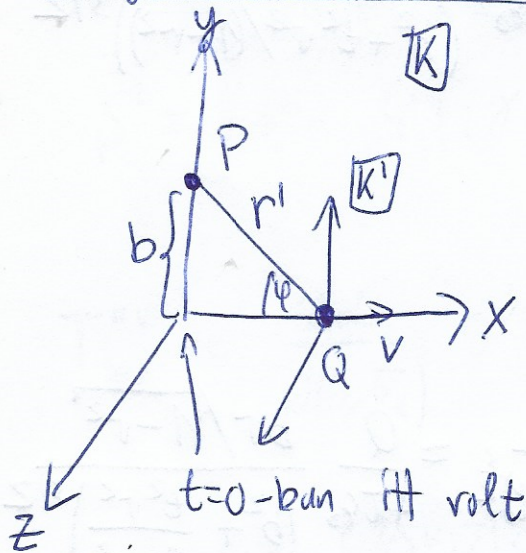
illetve: $z = z_0 + v_{0z} t$

Nemrelat. lineár

$$\omega = \frac{q B}{m}$$



Mozyd töltés EM tere



P koordinátái

K-ban:
 t
 $x=0$
 $y=b$
 $z=0$

K'-ben:
 $t'=t \cosh \chi - x \sinh \chi = t \sinh \chi$
 $x'=x \cosh \chi - t \sinh \chi = -t \sinh \chi$
 $y'=b$
 $z'=0$

(x tengely körüli forgásszim. miatt
 $z-t$ invariancia)

K'-ben statikus el. tér
 (Coulomb-törvény)

$$|\vec{E}'| = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(r')^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{b^2 + t^2 \sinh^2 \chi}$$

sugárirányú $E'_z = 0$ $E'_x = \frac{x'}{r'} |\vec{E}'| = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{t \sinh \chi}{(b^2 + t^2 \sinh^2 \chi)^{3/2}}$

$\vec{B}' = \vec{0}$ $E'_y = \frac{y'}{r'} |\vec{E}'| = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{b}{(b^2 + t^2 \sinh^2 \chi)^{3/2}}$

K-ban

Lorentz-transzformáció

szabályai

alapján

$$\begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \chi & -\sinh \chi & & \\ -\sinh \chi & \cosh \chi & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E'_x & E'_y & E'_z \\ & 0 & -B'_z & B'_y \\ szim. & 0 & -B'_x & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \chi & -\sinh \chi & & \\ -\sinh \chi & \cosh \chi & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_x = E'_x \quad E_y = E'_y \cosh \chi + B'_z \sinh \chi \quad E_z = E'_z \cosh \chi - B'_y \sinh \chi$$

$$B_x = B'_x \quad B_y = B'_y \cosh \chi - E'_z \sinh \chi \quad B_z = B'_z \cosh \chi + E'_y \sinh \chi$$

$$E_x = E'_x = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{t \sinh \chi}{(b^2 + t^2 \sinh^2 \chi)^{3/2}} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{tv\sqrt{1-v^2}}{[b^2 + t^2 v^2 / (1-v^2)]^{3/2}}$$

$$E_y = E_y' \cosh \chi + 0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{b \cosh \chi}{(b^2 + t^2 \sinh^2 \chi)^{3/2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{b/\sqrt{1-v^2}}{(b^2 + t^2 v^2/(1-v^2))^{3/2}}$$

$$E_z = E_z' \cosh \chi - B_y' \sinh \chi = 0$$

$$B_x = B_x' = 0$$

$$B_y = B_y' \cosh \chi - E_z' \sinh \chi = 0$$

$$B_z = B_z' \cosh \chi + E_y' \sinh \chi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{b \sinh \chi}{(b^2 + t^2 \sinh^2 \chi)^{3/2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{bv/\sqrt{1-v^2}}{(b^2 + \frac{t^2 v^2}{1-v^2})^{3/2}}$$

$$\boxed{r \ll b} \Rightarrow r' \approx r \quad \text{az} \quad (b^2 + t^2 v^2/(1-v^2))^{3/2} \approx r^3$$

$$B_z = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{br}{r^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\vec{v} \times \vec{r}|}{r^3}$$

$$br = v \cdot r \cdot \sin \varphi = |\vec{v} \times \vec{r}|$$

$$K\text{-ban} \quad \frac{E_x}{E_y} = -\frac{t}{b} \tanh \chi = -\frac{tr}{b} \Rightarrow \vec{E} \parallel \vec{r}$$

de nem izotrop

$$\boxed{HF} \quad b = r \sin \varphi$$

$$vt = r \cos \varphi$$



szögfüggő / anizotropia

A Dirac-mező energia-impulzus tenzora

$$S' = \int d^4x \bar{\Psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi = \int d^4x \underbrace{\left[\frac{i}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - \frac{i}{2} (\partial_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu \Psi - m \bar{\Psi} \Psi \right]}_{\text{parc. int.}}$$

$$T_{\text{kan}}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi})} \partial^\nu \bar{\Psi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi)} \partial^\nu \Psi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

0 Dirac-egy.:
(i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi = 0

$$= -\frac{i}{2} (\partial^\nu \bar{\Psi}) \gamma^\mu \Psi + \frac{i}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial^\nu \Psi$$

$$T_{\text{kan}}^{\mu\nu} + T_{\text{kan}}^{\nu\mu} = \frac{i}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial^\nu \Psi + \frac{i}{2} \bar{\Psi} \gamma^\nu \partial^\mu \Psi - \frac{i}{2} (\partial^\nu \bar{\Psi}) \gamma^\mu \Psi - \frac{i}{2} (\partial^\mu \bar{\Psi}) \gamma^\nu \Psi = \Theta^{\mu\nu}$$

$$\begin{aligned} \partial_\mu \Theta^{\mu\nu} &= \frac{i}{2} (\partial_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu \partial^\nu \Psi + \frac{i}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \partial^\nu \Psi \\ &+ \frac{i}{2} (\partial_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\nu (\partial^\mu \Psi) + \frac{i}{2} \bar{\Psi} \gamma^\nu \partial_\mu \partial^\mu \Psi \\ &- \frac{i}{2} (\partial_\mu \partial^\nu \bar{\Psi}) \gamma^\mu \Psi - \frac{i}{2} (\partial^\nu \bar{\Psi}) \gamma^\mu \partial_\mu \Psi \\ &- \frac{i}{2} (\partial_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\nu \partial^\mu \Psi - \frac{i}{2} (\partial^\mu \bar{\Psi}) \gamma^\nu (\partial_\mu \Psi) \end{aligned}$$

mozgásegyenlet: $i \gamma^\mu \partial_\mu \Psi = m \Psi$

$$-i \partial_\mu \Psi + \gamma^\mu \Psi = m \Psi \Rightarrow -i (\partial_\mu \Psi) \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\mu = m \Psi \gamma^\nu$$

$$-i(\partial_m \bar{\psi}) \gamma^m = m \bar{\psi}$$

$$i \gamma^m \partial_m \psi = m \psi$$

$$\partial^m \partial_m \psi = -m^2 \psi$$

$$\partial^m \partial_m \bar{\psi} = -m^2 \bar{\psi}$$

$$\partial_m \Theta^{m\nu} = -\frac{m}{2} \bar{\psi} \partial^\nu \psi + \frac{m}{2} \bar{\psi} \partial^\nu \psi$$

$$+ \frac{i}{2} (\partial_m \bar{\psi}) \gamma^\nu (\partial^m \psi) + \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\nu (-m^2 \psi)$$

$$- \frac{i}{2} (\partial_m \partial^\nu \bar{\psi}) \gamma^m \psi - \frac{m}{2} (\partial^\nu \bar{\psi}) \psi$$

$$+ \frac{i}{2} m^2 \bar{\psi} \partial^\nu \psi - \frac{i}{2} (\partial_m \bar{\psi}) \gamma^\nu (\partial^m \psi)$$

$$= \partial^\nu \left(-\frac{i}{2} (\partial_m \bar{\psi}) \gamma^m \right) \psi - \frac{m}{2} (\partial^\nu \bar{\psi}) \psi$$

$$= \frac{m}{2} (\partial^\nu \bar{\psi}) \psi - \frac{m}{2} (\partial^\nu \bar{\psi}) \psi = 0 \quad \checkmark$$

Vigyázat: általános esetben nem ilyen sima szimmetrizálást kell csinálni, hanem pl. EM mezőnél

$$T_{kan}^{MV} + \partial_\rho \Lambda^{\rho MV} \quad \text{ahol} \quad \Lambda^{\rho MV} = -\Lambda^{M \rho V}$$

itt a γ -mátrixok algebraja miatt voltak kiegészítések ami miatt a sima szimmetrizálás is jó volt