

1.) Schrödinger-egyenlet emlékeztető

diszperziós reláció

$$E = \frac{p^2}{2m} + V$$



$$i\hbar \partial_t \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V \psi$$

$$E \rightsquigarrow i\hbar \partial_t$$

$$\vec{p} \rightsquigarrow -i\hbar \vec{\nabla}$$

$$i\hbar \partial_t \psi = H \psi$$

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V \quad \text{+ Hamilton-operátor}$$

hullámfüggvény: $\psi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$

A) valószínűségi értelmezés

interpretáció $\rho = |\psi|^2 \geq 0$ valószínűségi sűrűség: részecske x-ben

konzisztens-e ez az interpretáció? Igen, mert:

$$i\hbar (\partial_t \psi) \psi^* = -\frac{\hbar^2}{2m} (\Delta \psi) \psi^* + V \psi \psi^* \quad (1)$$

$$-i\hbar (\partial_t \psi^*) \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} (\Delta \psi^*) \psi + V \psi^* \psi \quad (2)$$

$$(1) - (2) \Rightarrow i\hbar [(\partial_t \psi) \psi^* + \psi (\partial_t \psi^*)] = -\frac{\hbar^2}{2m} [(\Delta \psi) \psi^* - \psi (\Delta \psi^*)]$$

$$\Rightarrow \partial_t \rho + \operatorname{div} \vec{j} = 0 \quad \text{ahol} \quad \vec{j} = \frac{-i\hbar}{2m} [(\vec{\nabla} \psi) \psi^* - \psi (\vec{\nabla} \psi^*)]$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \int d^3x \rho = \int d^3x (-\operatorname{div} \vec{j}) = \oint_{\vec{F}} \vec{j} \cdot d\vec{F} = 0 \quad \text{↑ lecseng}$$

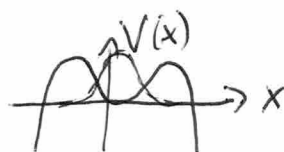
azaz $\int d^3x \rho = 1$ -et megőrzi az időfejlődés

B) alulról korlátos energiaspektrum

 $V(x) \geq C$ alulról korlátos potenciál

$$E = (\psi, H\psi) = (\psi, V\psi) + \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\right) \int d^3x (\Delta \psi) \psi^*$$

$$= \underbrace{(\psi, V\psi)}_{\geq C} + \underbrace{\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right) \int d^3x |\nabla \psi|^2}_{\geq 0} \geq C$$

ha $V(x)$ nem alulról korlátosalagút effektus
↓
instabilitás

2.) Klein-Gordon egyenlet

$$\boxed{c=1}$$

(2)

$$E^2 = p^2 + m^2$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} E &\sim i\hbar\partial_t \\ \vec{p} &\sim -i\hbar\vec{\nabla} \end{aligned}$$

$$-\hbar^2 \partial_t^2 \phi = -\hbar^2 \Delta \phi + m^2 \phi$$



$$\boxed{(\square + m^2)\phi = 0} \quad \text{kovariáns?} \\ \text{igen, } \checkmark$$

A) valószínűségi interpretáció

(a) $\int d^3x \mathcal{P} = \text{konst. időben}$

(b) $\mathcal{P} \geq 0$

(a) OK, ha találunk $\mathcal{T}^M$ -t, amire $\partial_M \mathcal{T}^M = 0$

$$\left. \begin{aligned} (\square\phi)\phi^* + m^2\phi\phi^* &= 0 \\ (\square\phi^*)\phi + m^2\phi^*\phi &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (\square\phi)\phi^* - \phi(\square\phi^*) = 0$$

$$\Rightarrow \partial_M \mathcal{T}^M = 0 \quad \text{ha} \quad \mathcal{T}_M = \phi^* \partial_M \phi - \phi \partial_M \phi^* \\ \mathcal{P} = \phi^* \partial_t \phi - \phi \partial_t \phi^*$$



Sch.: $\partial_t \rightarrow$ kezdeti feltétel $\psi(x,0)$

KG $\partial_t^2 \rightarrow$ -11-

$\phi(x,0), \partial_t \phi(x,0)$

$\rightarrow$ lehet $\mathcal{P} < 0$ $\begin{pmatrix} \downarrow \\ \downarrow \end{pmatrix}$

B) energiaspektrum

$$\phi = A e^{-i p_M x^M} = A e^{i(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)}$$

$$\Rightarrow (-p_M p^M + m^2)A = 0 \Rightarrow E = \pm \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$$

$\nwarrow$ negatív energia

ha csak szabad részecske van, akkor

nincs nagy probléma, de ha vannak kölcsönhatások is,

akkor lehet megjeleníteni a negatív energias állapotokat

$\rightarrow$ instabilitás



3.) Dirac-egyenlet

③

$$E = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2} \rightsquigarrow \sqrt{m^2 - \hbar^2 \Delta}$$

← sorfejtés

egzaktul

$$E = m + \frac{\vec{p}^2}{2m} + O\left(\frac{p^4}{m^3}\right)$$

→ nem konvergens ha $|\vec{p}| > m$ ⚡

→ $\Delta^2, \Delta^3, \Delta^4, \dots$ ~~minimum~~ bonyolult

Ansatz: (modern jelölés) $\boxed{(i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi = 0} \quad \boxed{\hbar=1}$

$(i \gamma^\mu \partial_\mu + m)(i \gamma^\nu \partial_\nu - m) \Psi = -(\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu + m^2) \Psi = 0$ még nem mondtam még, hogy ez mi

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu = \underbrace{\frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu)}_{\text{szimmetrikus}} \partial_\mu \partial_\nu + \underbrace{\frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu)}_{\text{antiszimmetrikus}} \partial_\mu \partial_\nu$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{2} \{ \gamma^\mu \gamma^\nu \} \partial_\mu \partial_\nu + m^2 \right] \Psi = 0$$

ez a Kb egyenlet, ha

$$\boxed{\{ \gamma^\mu \gamma^\nu \} = 2 \eta^{\mu\nu}}$$

Pl.: $\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_{2 \times 2} \end{pmatrix}$

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

4x4-es matrixok

Pauli $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

konvenció: $\sigma_1 = \sigma^1$

$\sigma_2 = \sigma^2$

$\sigma_3 = \sigma^3$

DE

$\gamma_\mu = \eta_{\mu\nu} \gamma^\nu$

Ez csak egy legegyszerűbb Elvárás

$$\gamma^\mu = \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\mu = 2 \gamma^\nu$$

$$\psi' = \gamma^0 \psi$$

A) Megmaradás dram?

$$\not{D} \Psi = \Psi + \gamma^0 \gamma^\mu \Psi \Rightarrow \not{D} \not{D} \Psi = 0$$

Biz.: (1) $\Psi^\dagger \gamma^0 [i \gamma^\mu (\partial_\mu \Psi)] = m \Psi + \gamma^0 \Psi$

(2) $-i (\partial_\mu \Psi^\dagger) (\gamma^\mu) + \gamma^0 \Psi = m \Psi + \gamma^0 \Psi$

$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0 \quad (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i \Rightarrow (\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$

Más jelölés:

$$\not{D} \Psi = \bar{\Psi} \not{D} \Psi$$

ahol $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$

$$(1) - (2) = i \left[\psi + \underbrace{\gamma^0 \gamma^M \gamma^0 \gamma^0}_{=1} \psi + (\partial_M \psi) \underbrace{\gamma^0 \gamma^M \gamma^0 \gamma^0}_{=1} \right] = 0 \quad (4)$$

$$\Rightarrow \partial_M [\psi + \gamma^0 \gamma^M \psi] = 0 \quad \square$$

$$P = M^0 = \underbrace{\psi + \gamma^0 \gamma^0 \psi}_1 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2 \geq 0$$

B) szabad részecskék spektruma

$$\psi = u(E, \vec{p}) e^{-i p_M x^M} = u(E, \vec{p}) e^{i(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)}$$

$$(i \gamma^M \partial_M - m) \psi = 0 \Rightarrow (\gamma^M p_M - m) u = 0$$

nyugalmi rendszer $\vec{p} = 0 \Rightarrow (E \gamma^0 - m) u = 0$

$$\Rightarrow (E \gamma^0 \gamma^0 - m \gamma^0) u = 0$$

sajátértékek

$$\begin{pmatrix} m & & & \\ & m & & \\ & & -m & \\ & & & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} u \\ \end{pmatrix}$$

$E = m$
 $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

és

$E = -m$
 $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(\vec{p} \neq \vec{0})$ HIF $\Rightarrow E = \pm \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$ 4×4 -es sajátérték-probléma

Honnan jön a 2-szeres degeneráció? Állítás: spin = 1/2
 Honnan tudjuk? fel/c

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

$$S_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^0 (i \gamma^m \partial_m - m) \psi = 0$$

$$= \mathcal{D} (i \partial_t + i \sum_k \gamma^0 \gamma^k \partial_k - m) \psi = 0$$

$$i \partial_t \psi = \underbrace{\left(i \sum_k \gamma^0 \gamma^k \partial_k + m \gamma^0 \right)}_{H_{\text{Dirac}}} \psi$$

5
Maga: a KG
egyenlet
gyökeiből
maga fel
a $\frac{1}{2}$ spin.

QFT/QED kurz:
Ez nem véletlen,
szintetikus
konstrukció.



HF: $[H_{\text{Dirac}}, L_k + S_k] = 0$	DE: $[L_k, L_k] \neq 0$ $[L_k, S_k] \neq 0$
---	--

azaz $L_k + S_k$ megmaradhat mennyiség

Emlékeztető: (QM)

$$\text{Tfh. } \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial t} = 0$$

$$\frac{d}{dt} (\psi, \mathcal{O} \psi) = \frac{d}{dt} \int d^3x \psi^* \mathcal{O} \psi = \int d^3x [(\partial_t \psi^*) \mathcal{O} \psi + \psi^* \mathcal{O} \partial_t \psi]$$

$$= \frac{i}{\hbar} \int d^3x \psi^* (H \mathcal{O} - \mathcal{O} H) \psi = \frac{i}{\hbar} (\psi, [H, \mathcal{O}] \psi)$$

$H = H^\dagger$
és sch.

jd hlr: $P \geq 0$ (i)

jd hlr: magától megjelent a $1/2$ -es spin (i)
(nemrelat. QM-er kizárta kellett beírni)

rossz hlr: ahhoz a KG egyenlet, itt

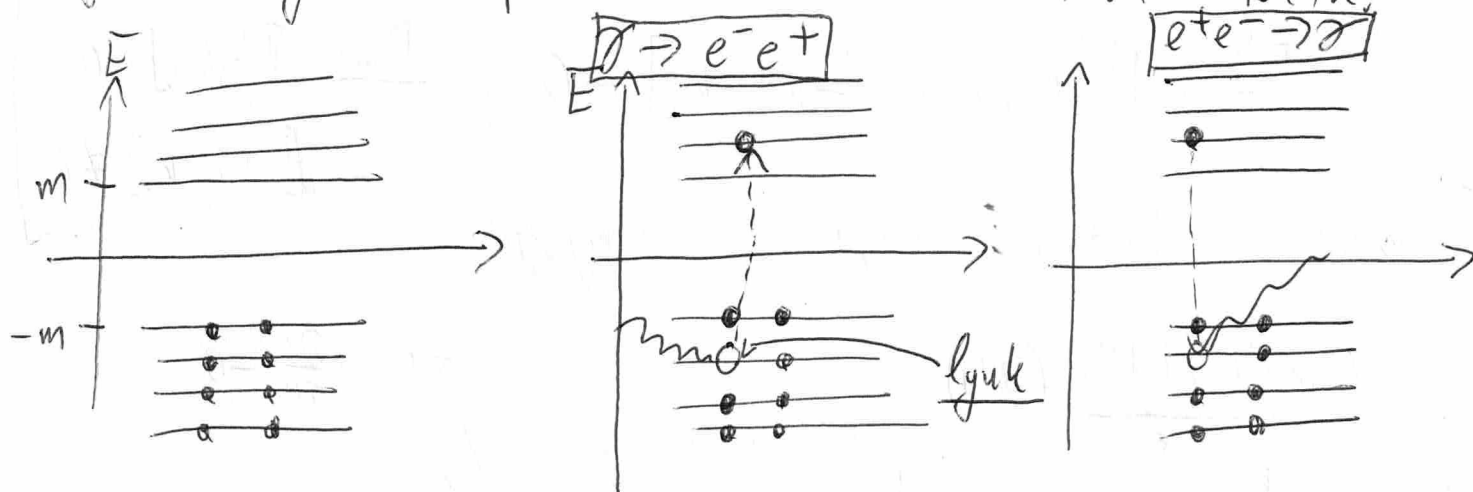
sem alulról korlátoz H spektruma (i)

4.) A Dirac-tenger és a pozitron

6

Dirac ötlete: $spin = \frac{1}{2} \rightarrow$ fermion $\rightarrow$ Pauli féle kizárási el nem lehet 2 e^- ugyanaz állapotban

Mi van, ha a Schrödinger elmélet alapállapotban a negatív energiájú állapotok mind be vannak töltve?

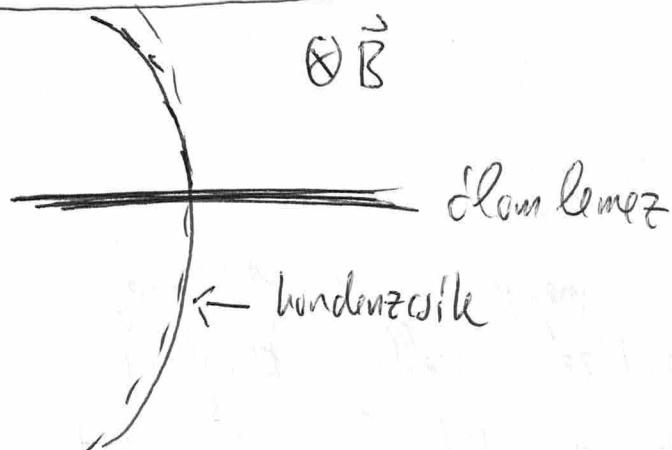


jólát: pozitron e^+

$$m_{e^-} = m_{e^+}$$

de töltése = $+e$

1933 Anderson: ködhamrás kísérlet



görcsület irányja

$\rightarrow$ pozitív töltés

nem lehet proton, mert

1) elromlomez elnyelne

2) görcsület

$$qvB = mrv^2/r$$

$$\Rightarrow r = mv/qB$$

$$\frac{m_p}{m_e} \approx 1840$$

Megj: ① A Dirac-tenger részecskefizikában ma már csak történeti érdekesség, de az igazán kellemes, hogy csak a Schrödinger-rendszernek van igazán értelme

OK: párkeltés miatt a részecske nem marad meg, tehát az $1e^-$ Hilbert-tér nem elég, Schrödingerre figyelni kell venni

→ konzisztensen kvantumtérelmélet/QED kurzus (MSc)

② Szi. kördteftfizikában vagy sk. test (MSc) vizsgát vannah olyan rendszerre ahol a Dirac-tenger kép jó közelítés

5.) A Dirac-egyenlet kovarianciája

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = 0$$

$$(i \gamma^\mu \partial'_\mu - m) \psi'(x') = 0$$

emlékeztető: skálármező $S(x) = S'(x')$
vektormező $V^\mu(x) = \Lambda^\mu_\nu V'^\nu(x')$

Dirac spinor mező $\psi_a(x) = R(\Lambda)_{ab} \psi'_b(x')$

↑ ? Még nem mondtam meg, hogy mi.

$$i \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) = m \psi(x) \Rightarrow i \gamma^\mu \partial_\mu (R \psi'(x')) = m R \psi'(x') \Rightarrow i R^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu R(\Lambda) \partial'_\mu \psi'(x') = m \psi'(x')$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \psi'(x') = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \psi'(x') = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \partial'_\nu \psi'(x')$$

$$x^\mu = \Lambda^\mu_\nu x'^\nu \quad x'^\nu = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu x^\mu$$

$$\Rightarrow i \underbrace{R^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu R(\Lambda) (\Lambda^{-1})^\nu_\mu}_{\gamma^\nu} \partial'_\nu \psi'(x') = m \psi'(x')$$

$$(\Lambda^{-1})^\mu_\nu R^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu R(\Lambda) \stackrel{!}{=} \gamma^\nu \Rightarrow \boxed{R^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu R(\Lambda) = \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu} \quad (*) \quad (8)$$

ha találunk ilyen $R(\Lambda)$ mátrixokat, a kovariancia OK
infinitesimális tréfá $\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \delta W^\mu_\nu$ $(W_{\mu\nu} = -W_{\nu\mu})$
 $(\Lambda^{-1})^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu - \delta W^\mu_\nu$

$$S = 1 - \frac{i}{2} \sum^{\mu\nu} \delta W_{\mu\nu} \quad S^{-1} = 1 + \frac{i}{2} \sum^{\mu\nu} \delta W_{\mu\nu}$$

$$O(\delta W_{\mu\nu}) \text{ rendben } (*) \Rightarrow i \left[\sum^{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu \right] = \gamma^{\mu\nu} \gamma^\rho - \gamma^{\rho\mu} \gamma^\nu$$

Állítás: $\sum^{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu = \frac{i}{4} [\gamma^\mu \gamma^\nu]$ ezt tudja

Biz: $[[\gamma^\mu \gamma^\nu] \gamma^\rho] = [\gamma^\mu \gamma^\nu] \gamma^\rho - \gamma^\rho [\gamma^\mu \gamma^\nu] =$
 $= \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho - \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu$
 $= \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho + \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu - \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\mu$
 $+ \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu + \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu$

$$= \gamma^\mu [\gamma^\nu \gamma^\rho] - [\gamma^\mu \gamma^\rho] \gamma^\nu + \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu - \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\nu = 4(\gamma^{\mu\nu} \gamma^\rho - \gamma^{\rho\mu} \gamma^\nu)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4} [[\gamma^\mu \gamma^\nu] \gamma^\rho] = \gamma^{\mu\nu} \gamma^\rho - \gamma^{\rho\mu} \gamma^\nu \quad \square$$

$$e^M = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{M}{n}\right)^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{R = \exp \left[-\frac{i}{2} W_{\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu} \right]} \text{ ahol } \Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad \text{Mielőtt } (*) \text{ -ot}$$

(9)

példa: forgatások xy síkban

$$\Lambda^M_V = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos \theta & \sin \theta & \\ & -\sin \theta & \cos \theta & \\ & & & 1 \end{pmatrix}_V = \mathbb{I}^M_V + \delta \theta \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\delta W^M_V} + O(\delta \theta^2)$$

$$\delta W_{\mu\nu} = \delta \theta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -\frac{i}{2} \delta W_{\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu} = \frac{\delta \theta}{8} ([\gamma^2 \gamma^1] - [\gamma^1 \gamma^2]) = \frac{\delta \theta}{4} [\gamma^2 \gamma^1]$$

$$\gamma^2 \gamma^1 - \gamma^1 \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$R(\lambda) = \mathbb{1} + \frac{\delta \theta}{2} i \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} + O(\delta \theta^2)$$

$$\delta \theta = \frac{\theta}{N} \Rightarrow R = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{i}{2} \frac{\theta}{N} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \right]^N = \exp \left[\frac{i}{2} \theta \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \mathbb{1} + \frac{i}{2} \theta \begin{pmatrix} \sigma_3 & \\ & \sigma_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \left(\frac{i}{2} \right)^2 \theta^2 \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \\ & \mathbb{1} \end{pmatrix} + \frac{1}{3!} \left(\frac{i}{2} \right)^3 \theta^3 \begin{pmatrix} \sigma_3 & \\ & \sigma_3 \end{pmatrix} + \dots$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \\ & \mathbb{1} \end{pmatrix} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\theta}{2} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\theta}{2} \right)^4 - \dots \right)}_{\cos \frac{\theta}{2}} + \begin{pmatrix} \sigma_3 & \\ & \sigma_3 \end{pmatrix} i \underbrace{\left(\frac{\theta}{2} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\theta}{2} \right)^3 + \dots \right)}_{\sin \frac{\theta}{2}}$$

☺ Ahogy egy fides spin transzformációk nem-vel am-ban de lehet

$$R \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \cos \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2 \times 2} & \\ & \mathbb{1}_{2 \times 2} \end{pmatrix} + i \sin \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} \sigma_3 & \\ & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) + i \sin(\theta/2) & & & \\ & \cos(\theta/2) - i \sin(\theta/2) & & \\ & & \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} & \\ & & & \cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

Példa: x-boost (HF) Ha nincs idő derék

(10)

$$\Lambda^M_V = \begin{pmatrix} \cosh \delta\chi & \sinh \delta\chi & 0 & 0 \\ \sinh \delta\chi & \cosh \delta\chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^M_V = \delta^M_V + \delta\chi \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^M_V + O(\delta\chi^2)$$

$$W^0_1 = 1 \quad W^1_0 = 1 \Rightarrow W_{01} = 1 \quad W_{10} = -1$$

$$\delta W^{\mu\nu}_M = \delta\chi \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -\frac{i}{2} \delta W^{\mu\nu}_M Z^{\mu\nu} = \frac{\delta\chi}{8} ([\gamma_0 \gamma^1] - [\gamma^1 \gamma_0]) = \frac{\delta\chi}{4} [\gamma_0 \gamma^1]$$

$$\gamma_0 \gamma^1 - \gamma^1 \gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R(1) = 1 + \frac{\delta\chi}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} + O(\delta\chi^2)$$

~~$\begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix}$~~

$$\delta\chi = \chi/N \Rightarrow R(1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{N} \frac{\chi}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \right]^N = \exp \left[\frac{\chi}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\exp \left[\frac{\chi}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \right] = 1 + \frac{\chi}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \left(\frac{\chi}{2} \right)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!} \left(\frac{\chi}{2} \right)^3 \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} + \dots$$

$$= \cosh \frac{\chi}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sinh \frac{\chi}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh \frac{\chi}{2} & 0 & 0 & \sinh \frac{\chi}{2} \\ 0 & \cosh \frac{\chi}{2} & \sinh \frac{\chi}{2} & 0 \\ 0 & \sinh \frac{\chi}{2} & \cosh \frac{\chi}{2} & 0 \\ \sinh \frac{\chi}{2} & 0 & 0 & \cosh \frac{\chi}{2} \end{pmatrix}$$

6.) Dirac-egyenlet EM térben

Emlékeztető: kanonikus impulzusban $p^M = p_{szabad}^M + QA^M$
 $H = \sqrt{m^2 + (\vec{p} - Q\vec{A})^2}$ $Q = -e$ (elektron)

$p^M \rightsquigarrow i\hbar\partial^M$ helyett $p^M + eA^M \rightsquigarrow i\hbar\partial^M + eA^M = i\hbar(\partial^M - \frac{i}{\hbar}eA^M)$

$\boxed{\hbar=1}$ $[i\gamma^M(\partial_M - ieA_M) - m]\Psi = 0$ (*)

Hydrogén-szerű atomok spektrumának finomszerkezete

$\gamma^0 (*) \Rightarrow i\partial_t \Psi = [-i \sum_{k=1}^3 \gamma^0 \gamma^k (\partial_k - ieA_k) + e\phi + m\gamma^0] \Psi$

Coulomb-potenciál: $A^M = (\phi, \vec{0})$ $\phi = -Ze/r$
 $\left\{ \begin{array}{l} \text{hosszú levezetés} \\ \text{itt is van Dirac-közp} \end{array} \right. \quad (\alpha = e^2 \approx 1/137)$

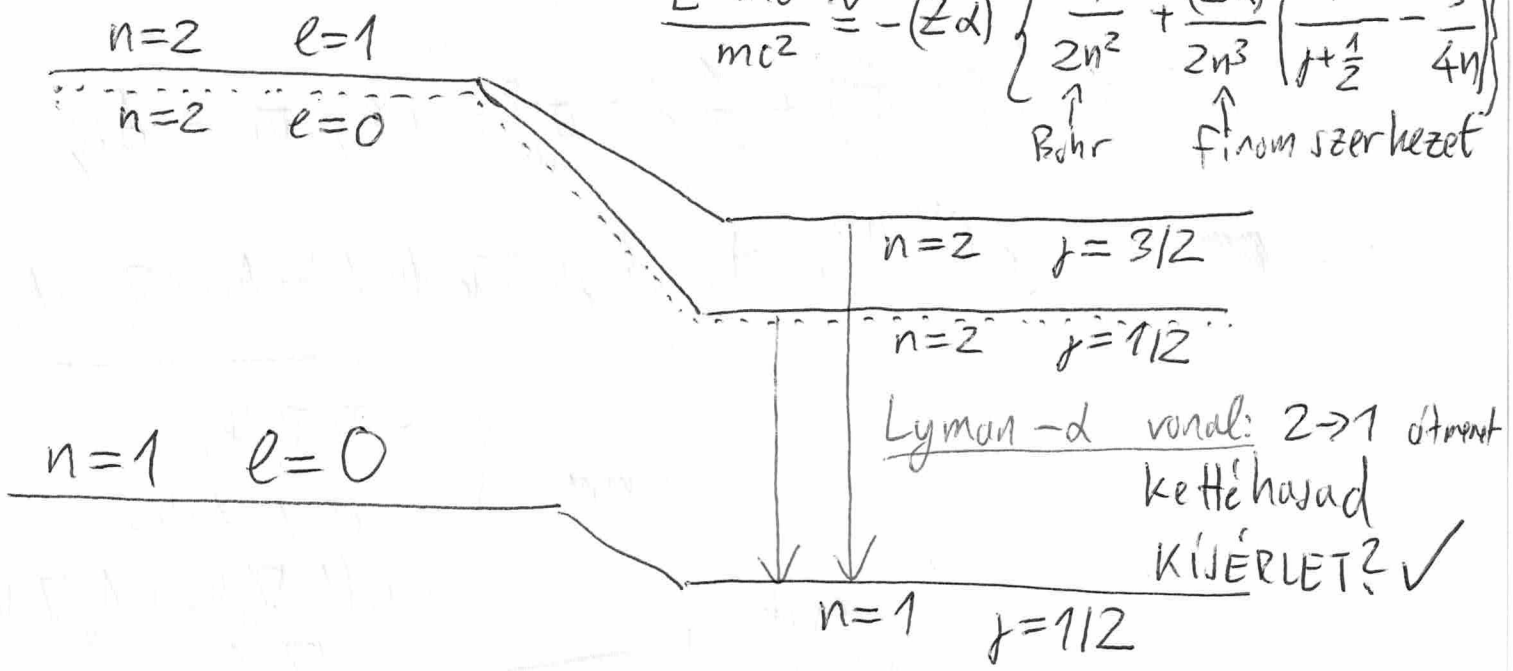
Schrödinger

$E_n = -\frac{(Z\alpha)^2}{2n^2}$
Bohr-formula

$E_{nj} = \pm m \left[1 + \frac{(Z\alpha)^2}{(n-j-\frac{1}{2} + \sqrt{(j+\frac{1}{2})^2 - (Z\alpha)^2})^2} \right]^{-\frac{1}{2}}$

↓ sorfejtés

$\frac{E-mc^2}{mc^2} \approx -(Z\alpha)^2 \left\{ \frac{1}{2n^2} + \frac{(Z\alpha)^2}{2n^3} \left(\frac{1}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right) \right\}$
↑ Bohr ↑ finomszerkezet



Az elektron mágneses dipólmomentuma

(12)

$$A^\mu = (0, \vec{A})$$

$$[\gamma^\mu (i\partial_\mu + eA_\mu) - m]\psi = 0$$

ansatz $\begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} e^{-iEt}$ 2 komponens

$$\begin{bmatrix} i\partial_t - m & \vec{\sigma} \cdot (i\vec{\nabla} - e\vec{A}) \\ -\vec{\sigma} \cdot (i\vec{\nabla} - e\vec{A}) & -i\partial_t - m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} e^{-iEt} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (E - m)\psi_+ + \vec{\sigma} \cdot (i\vec{\nabla} - e\vec{A})\psi_- = 0 \quad (1)$$

$$(E + m)\psi_- + \vec{\sigma} \cdot (i\vec{\nabla} - e\vec{A})\psi_+ = 0 \quad (2)$$

$$(2) \Rightarrow \psi_- \approx -\frac{1}{E+m \approx 2m} \vec{\sigma} \cdot (i\vec{\nabla} - e\vec{A})\psi_+$$

$$\xrightarrow{(1)} \frac{1}{2m} [\vec{\sigma} \cdot (i\vec{\nabla} - e\vec{A})]^2 \psi_+ \approx (E - m)\psi_+$$

$$\sigma_i (i\nabla_i - eA_i) \sigma_j (i\nabla_j - eA_j) \psi_+ = ?$$

$$\sigma_i \sigma_j = \frac{1}{2} [\sigma_i, \sigma_j] + \frac{1}{2} \{\sigma_i, \sigma_j\} = i\epsilon_{ijk} \sigma_k + \delta_{ij}$$

$$? = \cancel{\sigma_i \sigma_j} (i\vec{\nabla} - e\vec{A})^2 \psi_+ + i\epsilon_{ijk} \sigma_k \underbrace{(i\nabla_i - eA_i)(i\nabla_j - eA_j) \psi_+}$$

$$\text{Szimmetria} \left\{ \begin{array}{l} -\nabla_i \nabla_j \psi_+ \\ + e^2 A_i A_j \psi_+ \\ -ie(A_i \nabla_j \psi_+ + A_j \nabla_i \psi_+) \end{array} \right.$$

csak ez marad $\rightarrow -ie(\nabla_i A_j) \psi_+$

$$\hat{H} = (i\vec{\nabla} - e\vec{A})^2 \psi + ie\epsilon_{ijk} (\nabla_i A_j) \sigma_k \psi$$

$$= \left[(i\vec{\nabla} - e\vec{A})^2 + e \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \right] \psi$$

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{2m} (i\vec{\nabla} - e\vec{A})^2 + \frac{e}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \right] \psi \approx (E - m) \psi$$



tömegpont EM térben

$$- \vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

↑
mágneses
dipólusmomentum

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2m} \vec{\sigma} = -\frac{e}{m} \vec{S} \equiv g \cdot \left(\frac{-e}{2m} \right) \vec{S}$$

$$\boxed{g=2}$$

nonrel. QM-ban
kézzel kellett
beírni

↑
konvenencia

$$\left(\frac{g-2}{2} \right)_{\text{elektron}} \approx 0.0011614$$

$$\left(\frac{g-2}{2} \right)_{\mu} \approx 0.0011659$$

ehhez
már
kvantumter-
elmélet kell

7.) Lagrange-sűrűség

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\Psi} [i\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} - ieA_{\mu}) - m]\Psi$$

HF: Biz-ko, hogy ez egy skalar $\sim$ használj, hogy $R(1)\gamma^{\mu}R(1) = 1^{\mu}_{\nu}\gamma^{\nu}$

HF: a) mozgásegyenletek

b) Noether-tétel

$$\Psi \rightarrow e^{i\alpha}\Psi$$

$$\bar{\Psi} \rightarrow e^{-i\alpha}\bar{\Psi}$$

$$U(1) \text{ szim.} \Rightarrow \partial_{\mu}(\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\Psi) = 0$$

c) energia-impulzus tenzor = ?

QFT kurzuson: (MSc)

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \mathcal{L}_{\text{Maxwell}} \xrightarrow{\text{"kvantálás"}} \text{QED}$$