

6. előadás

Relativisztikus perfekt folyadékok

$c=1$

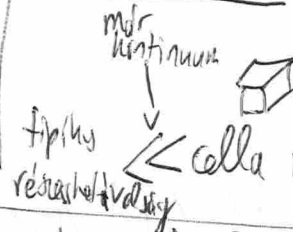
①

Alkalmazások:

- asztrofizika
- kozmológia
- nehézion-fizika

Hidrodinamika:

elemi cellák



$\vec{v} = \vec{v}_f$ a cellán belül
molekulák
tekinthetők
részecskének
valószínű
hogy

"Por"

Egyszerűsített modell. Részecskének halmozva, úgy

$\exists K$: mindegyik nyugalomban van (lokálisan)
sűrűség és sebesség helyfüggő, de egy adott elemi cellában minden részecskének sebessége nulla
 $n :=$ részecskeszám sűrűség ebben a lokálisan
együtt mozgó rendszerben (helyfüggő lehet, akár csak a rendszer)

Tph. a p. nyugalmi rendszerben $\Delta x \Delta y \Delta z$ térfogatban van
valahány részecske $\Rightarrow$ ugyanennyi részecske van $\Delta x \Delta y \Delta z \sqrt{1-v^2}$
Lorentz-kontrahekt térfogatban egy
V-vel mozgó K'-ben

$$\Rightarrow \frac{n}{\sqrt{1-v^2}} = \text{részecskeszám sűrűség egy olyan rendszerben, ahol } v \text{ sebességgel haladnak a részecskék}$$

Fluxus? (egységnyi idő alatt egységnyi felületen áthaladó részecskék száma)

Koordináták és a felület orientációjától függ.

1) A p. nyugalmi rendszerben $= 0$

2) A felület a p. részecskék mozgási sebességére merőleges
 $\times \vec{v}$

A diagram showing a fluid element in a 3D coordinate system with axes x , y , and z . The element is a rectangular prism with dimensions Δx , Δy , and Δz . The volume of the element is labeled $V \Delta t$. The element is shown moving with velocity u in the x -direction. The area of the face perpendicular to the x -axis is labeled $\Delta A = \Delta y \Delta z$.

$$\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$v \Delta t \Delta y \Delta z$$
 volume element $\Delta x \Delta y \Delta z$

3) A felület nem derékszögű, az $\vec{r}$ -vel
(y-z irány) (nem + irány)

(y-z plane)

$\Rightarrow \text{flux}_x = \frac{n v_x}{\sqrt{1-v^2}}$

(norm + relativ)

$\Rightarrow N_m = n \cdot \underbrace{u_m}_{\text{négyeszetesség}}$

$$N_m = \gamma \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{v_x}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{v_y}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{v_z}{\sqrt{1-v^2}} \right)$$

$$u^\mu u_\mu = 1 \Rightarrow N^\mu N_\mu = n^2$$

③

$\mathcal{P}$ = energiasűrűség nyugalmi rendszerben $\boxed{\mathcal{P}_{\text{por}} = n m}$ por részecskéinek tömege

mozgó részecskékre: $\left. \begin{array}{l} \text{sűrűség } n'' = \frac{n}{\sqrt{1-v^2}} \\ \text{energia } \dot{u} = n'' \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} \end{array} \right\} \frac{\mathcal{P}_{\text{por}}}{1-v^2} = \text{energiasűrűség egy olyan rendszerben ahol a por v-re mozog}$

Impulzusűrűség? x-irányban $\left(\frac{n}{\sqrt{1-v^2}} \right) \cdot \frac{m v_x}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{\mathcal{P}_{\text{por}} v_x}{\sqrt{1-v^2}^2} = \frac{\mathcal{P}_{\text{por}} v_x}{1-v^2}$

energia és impulzus fluxus?

$$\text{energiafluxus} = \left(\frac{n v_x}{\sqrt{1-v^2}} \right) \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} = \text{impulzusűrűség}$$

$$\begin{array}{l} \text{i irányú impulzus} \\ \text{fluxusa j irányú felületen} \end{array} = \frac{n v_j}{\sqrt{1-v^2}} \frac{m v_i}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{\mathcal{P}_{\text{por}} v_i v_j}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_{\alpha\beta}^{\text{por}} = \mathcal{P}_{\text{por}} u_\alpha u_\beta}$$

por energia-impulzus tenzora

szimmetrikus

$$T_{\text{por nyugalmi rendszerben}} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{\text{por}} & \\ & \phi \end{pmatrix}$$

Folyadék

kontinuum közelítés
folyadék elem



folyadék elemmel pillanatnyiilag együtt mozgó rendszerben, azaz

= -11-

-11- nyugalni rendszerben definiálhatjuk

U^M = folyadék elemmel pillanatnyiilag együttmozgó rendszer sokasága
a labor rendszerben mérve

n = részecskék sűrűsége
 Π = belső energia / részecské
 T = hőmérséklet
 ρ = energia sűrűsége
 p = nyomás
 s = entropia / részecské
Folyadék entropia

pillanatnyiilag
együtt mozgó rendszerben

termodinamika 1. főtétele a folyadék elemre

$$\Delta E = \Delta Q - p \Delta V \Rightarrow \Delta Q = \Delta E + p \Delta V$$

megmaradó

$$V = \frac{N}{n} \Rightarrow \Delta V = - \frac{N}{n^2} \Delta n$$

← részecskeszám

tipikusan
részecskék - antirészecskék párosa
a párokeltés miatt

$$E = PV = PN/n \Rightarrow \Delta E = P\Delta V + V\Delta P$$

⑤

$$\Rightarrow \Delta Q = \Delta E + p\Delta V = \cancel{P\Delta V} (P+p)\Delta V + V\Delta P = \frac{N}{n}\Delta P - N(P+p)\frac{\Delta n}{n^2}$$

$$\parallel N\Delta q \leftarrow \text{elnyelt h}\ddot{o} / \text{r}\ddot{e}szecske} \Rightarrow n\Delta q = \Delta P - \frac{P+p}{n}\Delta n$$

$$2. \text{ f}\ddot{o}t\ddot{e}tel \Rightarrow \Delta Q = T\Delta S$$

$$\Rightarrow \left| dP - (P+p)\frac{dn}{n} = nT\Delta S \right|$$

$T^{\alpha\beta}$ a pill. egy. mez. r.-ben:

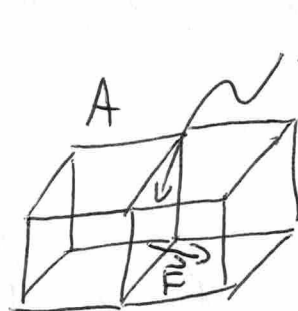
$$T^{00} = \text{energias}\ddot{r}\ddot{u}cs\acute{e}g = \rho$$

$$T^{0i} = \text{energiafluxus} \leftarrow \text{ebben a rendszerben csak h}\ddot{o}\text{vezet}\ddot{e}sb\ddot{o}l$$

$$T^{i0} = \text{impulzus}\ddot{r}\ddot{u}cs\acute{e}g = T^{0i}$$

$$T^{ij} = \text{fesz}\ddot{u}lts\acute{e}g / \text{impulzusfluxus} / \text{impulzuss}\ddot{r}\ddot{u}cs\acute{e}g$$

T^{ij} jelentése



S felület, ami a két szomszédos folyadékkeletet összeköti

$\vec{F}$ erő hat B-re A által

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow A \text{ impulzust ad át B-re, } \vec{F} \text{ ennek az időbeli rátája}$$

$$\text{impulzus fluxus} = \frac{\vec{F}}{A}$$

ha S az x^i tengelyre merőleges felület, akkor

$$T^{ij} = F^i / A$$

perfekt folyadék

6

a) nincs hővezetés $\Rightarrow T^{0i} = T^{i0} = 0$

b) nincs viszkozitás $\Rightarrow$ erő merőleges a felületre

$$\Rightarrow T^{ij} = 0 \quad \text{ha } i \neq j$$

ha még izotrop is, akkor $T^{ij} = p \delta^{ij}$

$\uparrow$
nyomás = $\frac{\text{erő}}{\text{felület}}$

$$\Rightarrow T^{\alpha\beta}_{\text{p.e.m.r.}} = \text{diag}(p, p, p, p)$$

$$\Rightarrow T^{\alpha\beta} = (p + \rho) u^\alpha u^\beta - p \eta^{\alpha\beta}$$

spec. eset $p=0$
 $\Rightarrow$ por

érintéshorizonton megmaradói

$$\partial_\mu N^\mu = \partial_\mu (n u^\mu) = 0$$

energia, impulzus

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

u^μ -vel párhuzamos komponens

$$u_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} = \underbrace{u_\nu u^\nu}_{=1} \partial_\mu ((p + \rho) u^\mu) + (p + \rho) \underbrace{u^\mu u_\nu \partial_\mu u^\nu}_{=0} - u_\nu \partial^\nu p$$

$$\partial_\mu \left(\frac{p + \rho}{n} n u^\mu \right) - u_\nu \partial^\nu p = 0$$

$$\downarrow \partial_\mu (n u^\mu) = 0 \quad \text{kont.}$$

$$u^\mu \left(n \partial_\mu \frac{p + \rho}{n} - \partial_\mu p \right) = 0$$

$$\begin{aligned} u_\mu u^\mu &= 1 \\ \downarrow \partial_\nu \\ u_\mu \partial_\nu u^\mu &= 0 \end{aligned}$$

$$u^\mu \left[n \frac{\partial_{\mu n}}{n^2} (p+p) + \partial_\mu (p+p) - \cancel{\partial_\mu p} \right] = u^\mu \left[\partial_\mu p - (p+p) \frac{\partial_{\mu n}}{n} \right] = 0 \quad (7)$$

de: $d p - (p+p) \frac{dn}{n} = 0 \Rightarrow \boxed{u^\mu \partial_\mu S = \frac{dS}{d\tau} = 0}$ adiabatikus
folygos entropia
konstans

u^μ -re merőleges komponens $P^\mu_\rho P^\rho_\nu = P^\mu_\nu$ vetítés
 $P^\mu_\nu u^\nu = 0$ u^μ -re merőleges

$$P^\mu_\nu = S^\mu_\nu - u^\mu u_\nu \quad \checkmark$$

$$P^\mu_\rho \partial_\nu T^{\rho\nu} = \partial_\nu T^{\mu\nu} - u^\mu u_\rho \partial_\nu T^{\rho\nu} = 0 \quad \text{jelölés: } w = p + p$$

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = u^\mu \partial_\nu (w u^\nu) + (w u^\nu) (\partial_\nu u^\mu) - \partial^\mu p$$

$$P^\mu_\rho \partial_\nu T^{\rho\nu} = u^\mu \partial_\nu (w u^\nu) + (w u^\nu) (\partial_\nu u^\mu) - \partial^\mu p - u^\mu \underbrace{u_\rho u^\rho}_{=1} \partial_\nu (w u^\nu) - u^\mu u_\rho (w u^\nu) (\partial_\nu u^\rho) + u^\mu u_\rho (\partial^\rho p) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{(p+p) u^\nu \partial_\nu u^\mu = \partial^\mu p - u^\mu u_\rho \partial^\rho p}$$

relativisztikus Euler-egyenlet (kovarianc) alak

$$u_\rho u^\rho = 1$$

$$\Downarrow \partial_\nu$$

$$u_\rho \partial_\nu u^\rho = 0$$

$$u^\mu = \partial(1, \vec{v}) \quad \gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$$

$$\partial^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right) \quad \partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) \quad u^\mu \partial_\mu = \gamma \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \right)$$

$$m=0: \gamma(p+p) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \gamma = \frac{\partial p}{\partial t} - \gamma \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) p \quad (I)$$

$$m=i: \gamma(p+p) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) (\gamma \vec{v}) = -\nabla p - \gamma \vec{v} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) p \quad (II)$$

$$\left[(II) - (I) \cdot \vec{v} \right] \cdot \frac{1-v^2}{p+p} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = - \frac{1-v^2}{p+p} \left(\nabla p + \vec{v} \frac{\partial p}{\partial t} \right)}$$

egyenletek: $\begin{matrix} \text{kont.} \\ \swarrow \\ 1 \end{matrix} + \begin{matrix} \text{adib.} \\ \swarrow \\ 1 \end{matrix} + \begin{matrix} \text{Euler} \\ \swarrow \\ 3 \end{matrix} \Rightarrow 5$

relativisztikus Euler (sekkésgépek)

változók: $n, p, \vec{v} \Rightarrow 6 \Rightarrow$ kell állapotegy. $p(p, n)$

Allopotegyenletek (durva becslés) egy csomó tömegpont = ②

$$T^{\alpha\beta} = \sum_{(k)} P_{(k)}^{\alpha} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_{(k)}) \Rightarrow P^{\alpha} = \int T^{\alpha\beta} d^3x = \sum_{(k)} P_{(k)}^{\alpha} \checkmark$$

impulzus fluxussűrűség:

$$T^{\alpha i} = \sum_{(k)} P_{(k)}^{\alpha} \frac{dx_{(k)}^i}{dt} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_{(k)})$$

α impulzus fluxusa i irányba i -re merőlegesen $\int T^{\alpha i} d^3x = \sum P_{(k)}^{\alpha} v_{(k)}^i$
 (uaz az érvelés mint a $p_{(k)}^i$ esetében, csak nem azonos a részecskék sebessége)

$$\Rightarrow T^{\alpha\beta} = \sum_{(k)} \frac{P_{(k)}^{\alpha} P_{(k)}^{\beta}}{E_{(k)}} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_{(k)})$$

$$\Rightarrow \left[\begin{aligned} p &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 T^{\alpha i} = \frac{1}{3} \sum_{(k)} \frac{\vec{P}_{(k)}^2}{E_{(k)}} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_{(k)}) \\ \rho &= T_{00} = \sum_{(k)} E_{(k)} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_{(k)}) \\ n &= \sum_{(k)} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_{(k)}) \end{aligned} \right]$$

nem-relat.
 $(T \ll m)$ $E_{(k)} \approx m + \frac{P_{(k)}^2}{2m} \Rightarrow \frac{P_{(k)}^2}{E_{(k)}} \approx \frac{P_{(k)}^2}{m}$

$$\Rightarrow \rho \approx m \sum_{(k)} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_{(k)}) + \frac{1}{2} \sum_{(k)} \frac{\vec{P}_{(k)}^2}{m} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_{(k)}) = mn + \frac{3}{2} p$$

ultrarelat.
 $(T \gg m)$ $E_{(k)} \approx |\vec{P}_{(k)}| \Rightarrow p = \frac{1}{3} \rho$

por $p = 0$ $\rho = n \cdot m$

nemrelat. gáz $\rho \approx n \cdot m + \frac{3}{2} p$

ultrarelat. gáz $\rho = 3p$

$\uparrow$ pl. fotongáz

(9)

Alkalmazás: hangsebesség

$$n = n_0 + n_1 \quad \rho = \rho_0 + \rho_1 \quad p = p_0 + p_1 \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1 = \vec{v}_1 \leftarrow \begin{array}{l} \text{statikus} \\ \text{foly. km} \\ \text{hanghullám} \end{array}$$

lineáris rend $n_1, \rho_1, p_1, \vec{v}_1$ -ben:

$$\text{kontinuitási e.} \Rightarrow \frac{\partial n_1}{\partial t} + n_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1) = 0 \quad (A)$$

$$\text{Euler} \Rightarrow \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = - \frac{\nabla p_1}{\rho_0 + \rho_0} \quad (B)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (A) = \frac{\partial^2 n_1}{\partial t^2} + n_0 \frac{\partial (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1)}{\partial t} \underset{\substack{\uparrow \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}}}{=} \frac{\partial^2 n_1}{\partial t^2} - \frac{n_0}{\rho_0 + \rho_0} \Delta p_1 = 0$$

$$dS = 0 \Rightarrow p_1 - \frac{\rho_0 + \rho_0}{n_0} n_1 = 0 \quad \text{adiabaticus}$$

$$p_1 = \frac{p_1}{p_1} p_1 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{S=\text{konst.}} \frac{\rho_0 + \rho_0}{n_0} n_1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{S=\text{konst.}} \right) n_1 = 0 \Rightarrow \boxed{v_s^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{S=\text{konst.}}}$$

ultrarelativistikus gáz (T >> m)

$$p = \rho/3$$

$$\Rightarrow \boxed{v_s = \frac{1}{\sqrt{3}}}$$