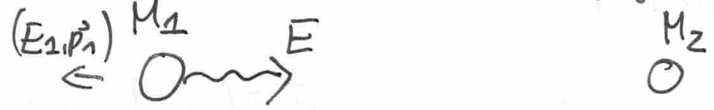
4. előadás | $\varnothing$ tömegű részecskék (Fotonok)

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \frac{\vec{p}\,c^2}{E}$$

$$E = \sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \frac{\vec{p}}{\sqrt{m^2c^2 + \vec{p}^{\,2}}}\,c \;\xrightarrow[m \to 0]{}\; \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}\cdot c$$

$\boxed{c=1}$ $\quad E = |\vec{p}|$ $\quad$ fotonra energia = impulzus

nincs nyugalmi rendszere



M_1 tömegű részecske kibocsát egy E energiájú fotont, egy másik elnyeli

kibocsátáskor:

$$M_1 = E_1 + E$$
$$0 = p_1 - E \quad \Rightarrow \quad E_1^2 - p_1^2 = (M_1 - E)^2 - E^2 = M_1^2 - 2E_1E < M_1^2$$

elnyeléskor:

$$E + M_2 = E_2 \quad \Rightarrow \quad E_2^2 - p_2^2 = M_2^2 + 2EM_2 > M_2^2$$
$$E = p_2$$

„~~tömeget~~ energiát szállított a foton az egyik testből a másikba"

Planck hipotézis: foton energiája $\quad E = h\nu \; (/c^2)$

Kérdés: lehet-e ez természettörvény? invariáns-e ez a feltétel Lorentz-tr.?

Mozogjon a foton x tengely mentén $\rightarrow$ x irányú boost

$$p^\mu = (E, E, 0, 0)$$
$$p^{\mu\prime} = (E', E', 0, 0)$$

$$p^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \, p'^\nu \qquad\qquad E = E'(\cosh\chi + \sinh\chi) = E' e^{\chi}$$

$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ a fotont leíró hullám frekvenciája $\quad$ lásd 2. előadás

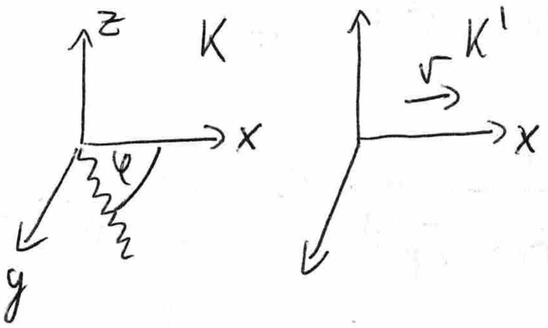
hullámegyenlet $\Box\phi = 0 \;\Rightarrow\; \phi \sim e^{ik^\mu x_\mu} = e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{x})}$ $\qquad k^\mu = (\omega, \vec{k})$

$k^\mu k_\mu = 0 \;\Rightarrow\; \omega = |\vec{k}| \;\Rightarrow\; \omega = \omega' \cosh\chi + |\vec{k}'| \sinh\chi = \omega' e^{\chi}$

E és ν egyformán transzformálódik, tehát $E = h\nu$ értelmes

Doppler-effektus

ν és E azonosan transzformálódik, vizsgáljuk E-t



K-ban xy síkban φ szögben mozgó foton

K'-ben φ'

$$K: \quad p^\mu = (E, p\cos\varphi, p\sin\varphi, 0)$$

$$K': \quad p^{\mu'} = (E', p'\cos\varphi', p'\sin\varphi', 0)$$

$$\begin{pmatrix} E \\ p\cos\varphi \\ p\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\chi & \operatorname{sh}\chi & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}\chi & \operatorname{ch}\chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E' \\ p'\cos\varphi' \\ p'\sin\varphi' \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} E &= E'\operatorname{ch}\chi + p'\cos\varphi'\operatorname{sh}\chi \\ p\cos\varphi &= E'\operatorname{sh}\chi + p'\cos\varphi'\operatorname{ch}\chi \\ p\sin\varphi &= p'\sin\varphi' \end{aligned}$$

fény $\Rightarrow E = p \quad E' = p' \Rightarrow E = E'\operatorname{ch}\chi(1 + \cos\varphi' \operatorname{th}\chi)$

$$= E'\operatorname{ch}\chi\left(1 + \frac{v}{c}\cos\varphi'\right)$$

$$= \frac{E'\left(1 + \frac{v}{c}\cos\varphi'\right)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

nemrelativiszt. nincs

$$E\cos\varphi = E'\operatorname{ch}\chi(\operatorname{th}\chi + \cos\varphi') = E'\operatorname{ch}\chi\left(\frac{v}{c} + \cos\varphi'\right)$$

$$\cos\varphi = \frac{(v/c) + \cos\varphi'}{1 + \frac{v}{c}\cos\varphi'}$$

<u>HF</u> $T = 300K$ hőmérsékletű, 3 szabadsági fokú gáz mozgását mennyire befolyásolja a hőmozgás?

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = ? \qquad \frac{3}{2}k_B T = \frac{1}{2}mv^2$$

Ponttöltés mozgása EM térben $(c=1)$

$$S = S_{r(\text{részecske})} + S_{r(\text{részecske})e(\text{erőtér})} + S_{e(\text{erőtér})}$$

$$S_r = -m\int ds$$

$S_e \leftarrow$ később $\qquad S_{re} \leftarrow$ most

Eddig: erőtér leírható skalár + vektor potenciállal
legegyszerűbb erre emlékeztető kovariáns hatás:

$$S_{re} = -Q\int A_\mu dx^\mu \qquad A_\mu = (\phi, \vec{A}) \text{ négyes potenciál}$$

Q a részecske csatolása az erőtérhez (töltés)

$$\underbrace{S_r + S_{re}}_{=S} = -m\int ds + Q\int \vec{A}\, \underset{\uparrow\, \vec{v}\, dt}{d\vec{x}} - Q\int \phi\, dt$$

$$S = \int \underbrace{\left(-m\sqrt{1-v^2} + Q\vec{A}\cdot\vec{v} - Q\phi\right)}_{=L} dt$$

ált. impulzus $\qquad \vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}} + Q\vec{A} = \vec{p}_{szabad} + Q\vec{A}$

Hamilton-fv. $\qquad H = \vec{v}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - L = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} + Q\phi$

$\vec{p}$-vel kifejezve $\qquad (H - Q\phi)^2 = \frac{m^2}{1-v^2} = \frac{m^2(1-v^2) + mv^2}{1-v^2}$

$$= m^2 + (\vec{p} - Q\vec{A})^2$$

$$H = \sqrt{m^2 + (\vec{p} - Q\vec{A})^2} + Q\phi$$

Mozgásegyenletek:

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = Q\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} v_j - \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right)$$

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{dp_i^{szabad}}{dt} + Q\frac{dA_i}{dt} = \frac{dp_i^{szabad}}{dt} + Q\left(\frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\partial A_i}{\partial x_j} v_j\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dp_i^{szabad}}{dt} = Q\left(-\frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t}\right) + Q\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right) v_j$$

$$v_j\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right) = \varepsilon_{ijk} v_j \varepsilon_{klm} \partial_l A_m = (v \times \mathrm{rot}\,\underline{A})_i$$

(HF)

$$\boxed{\frac{d\vec{p}_{szabad}}{dt} = Q\Big(\underbrace{-\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}_{\vec{E}} + \vec{v} \times \underbrace{\mathrm{rot}\,\vec{A}}_{B}\Big) \qquad \text{Lorentz-erő}}$$

Ugyanez 4-es formalizmusban

$$S = \int_a^b \left(-m\,ds - Q A_\mu dx^\mu\right)$$

$$\delta S = \delta \int_a^b \left(-m\,ds - Q A_\mu dx^\mu\right) = -\int_a^b \left(m \frac{dx_\mu\, d\delta x^\mu}{ds} + Q A_\mu d\delta x^\mu + Q(\delta A_\mu) dx^\mu\right)$$

$$= \underbrace{\left(-m u_\mu \delta x^\mu - Q A_\mu \delta x^\mu\right)\Big|_a^b}_{=0,\ \text{mert}\ \delta x^\mu_a = 0 = \delta x^\mu_b} + \int_a^b m\, du_\mu\, \delta x^\mu + Q\, dA_\mu\, \delta x^\mu - Q\, \delta A_{\underset{\mu \to \nu}{\mu}}\, dx^\mu$$

$\delta A_\nu = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}\delta x^\mu \qquad dA_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} u^\nu ds$

$du_\mu = \frac{du_\mu}{ds} ds \qquad dx^\mu = u^\mu ds$

$$\delta_t S' = \int m a_\mu + Q \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} u^\nu - Q \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} u^\nu \Big) \delta x^\mu ds$$

$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$

$\forall \delta x^\mu$-re $0 \Rightarrow m a_\mu = Q\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right) u^\nu$

$\boxed{F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu}$ ← térerősség tenzor

$F_{\mu\nu} = - F_{\nu\mu}$

$\boxed{m a_\mu = Q F_{\mu\nu} u^\nu}$

$A^\mu = (\phi, \vec{A}) \qquad A_\mu = (\phi, -\vec{A})$

$F_{00} = 0 \qquad F_{0i} = \frac{\partial(-A_i)}{\partial t} - \frac{\partial A_0}{\partial x^i} = E_i$

$F_{12} = -\frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \left(-\frac{\partial A_1}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial A_1}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_1} = -(\mathrm{rot}\,\vec{A})_3 = -B_3$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Általánosított 4-es impulzus: $\delta x_a^\mu = 0 \quad \delta x_b^\mu \neq 0$

$\Rightarrow \delta_i S' = -\left(m u_\mu + Q A_\mu\right) \delta x_b^\mu$

$\Rightarrow \boxed{p_\mu = -\frac{\partial S}{\partial x^\mu} = m u_\mu + Q A_\mu}$

Térerősségek Lorentz-transzformációja

kovariáns 4-es tenzor $F_{\mu\nu} = \Lambda_\mu{}^\rho \Lambda_\nu{}^\sigma F'_{\rho\sigma}$

$$\Lambda^\mu{}_\rho = \begin{pmatrix} ch\chi & sh\chi & 0 & 0 \\ sh\chi & ch\chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \Lambda_\mu{}^\rho = \begin{pmatrix} ch\chi & -sh\chi & 0 & 0 \\ -sh\chi & sh\chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} = \Lambda_\mu{}^\rho F_{\rho\sigma} \underbrace{\Lambda_\nu{}^\sigma}_{(\Lambda^T)^\sigma{}_\nu}$$

$$= \begin{pmatrix} ch\chi & -sh\chi & & \\ -sh\chi & ch\chi & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E_x' & E_y' & E_z' \\ -E_x' & 0 & -B_z' & B_y' \\ -E_y' & B_z' & 0 & -B_x' \\ -E_z' & -B_y' & B_x' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ch\chi & -sh\chi & & \\ -sh\chi & ch\chi & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad E_x = E_x' \qquad E_y = E_y' ch\chi + B_z' sh\chi \qquad E_z = E_z' ch\chi - B_y' sh\chi$$

$$B_x = B_x' \qquad B_y = B_y' ch\chi - E_z' sh\chi \qquad B_z = B_z' ch\chi + E_y' sh\chi$$

mátrix szorzás

A térerősségek invariánsai

$F_{\mu\nu}$ 4-es tenzor $\Rightarrow$ $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ inv. és $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma}$ = inv.

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{\text{HF}} \quad F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(\vec{B}^2 - \vec{E}^2) \\ \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} = -8\,\vec{E}\cdot\vec{B} \end{array}}$$

skalár

pszeudoskalár

Következmények: – ha egy rendszerben $\vec{E} \perp \vec{B}$ $\Rightarrow$ minden rsz.-ben $\vec{E} \perp \vec{B}$

– ha egy rendszerben $|\vec{E}| = |\vec{B}|$ $\Rightarrow$ minden rsz.-ben $|\vec{E}| = |\vec{B}|$

– (kevésbé triv.) ha legalább az egyik inv. $\neq 0$

$\Rightarrow$ $\exists$ rsz., ahol $\vec{E} \parallel \vec{B}$

– ha $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ $\Rightarrow$ $\exists$ rsz., ahol $\vec{E} = \vec{0}$ vagy $\vec{B} = \vec{0}$

($\vec{B}^2 - \vec{E}^2$ előjelétől függően)

Elektromágneses tér egyenletei

Maxwell egyenletek (vákuumban) nem kovariáns alakja

1) $\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 2) $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$

3) $\mathrm{div}\,\vec{E} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho$ 4) $\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2} = 1 \Rightarrow \mathrm{rot}\,\vec{B} = \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

forrásmentes egyenletek $\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A} \Rightarrow 2 \checkmark$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \Rightarrow 1 \checkmark$$

$$4)\quad \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{B} = 0 = \frac{1}{\varepsilon_0}\mathrm{div}\,\vec{j} + \frac{\partial\, \mathrm{div}\,\vec{E}}{\partial t} \underset{3)}{=} \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\mathrm{div}\,\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right) = 0$$

kontinuitási egyenlet

Maxwell-egyenletek $F_{\mu\nu}$-vel

$$3)\quad \mathrm{div}\,\vec{E} = \underbrace{\sum_i \partial_i E_i}_{\sum_i \frac{\partial E_i}{\partial x^i}} = \sum_i \partial_i F_{0i} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \Rightarrow \partial^\mu F_{0\mu} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial^\mu F_{\mu 0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho}$$

4) pl. x komponens

$$(\text{rot}\,\vec{B})_x = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{1}{\varepsilon_0} j_x + \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial F_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x_3} = \frac{1}{\varepsilon_0} j_1 + \frac{\partial F_{01}}{\partial x_0}$$

$$\frac{\partial F_{01}}{\partial x_0} - \frac{\partial F_{11}}{\partial x_1} - \frac{\partial F_{21}}{\partial x_2} - \frac{\partial F_{31}}{\partial x_3} = -\frac{1}{\varepsilon_0} j_1$$

$\Rightarrow \partial^\mu F_{\mu 1} = -\frac{1}{\varepsilon_0} j_1$ úgy y, z komponens

$\overset{3,4}{\Rightarrow} \boxed{\partial^\mu F_{\mu\nu} = \frac{1}{\varepsilon_0} j_\nu}$ ahol $j_\mu = (\rho, -\vec{j})$

$j^\mu = (\rho, \vec{j})$ négyesáram

$$\overset{\partial^\nu}{\Longrightarrow} \underbrace{\partial^\mu \partial^\nu}_{\text{szimm}} \underbrace{F_{\mu\nu}}_{\text{aszim}} = 0 = \frac{1}{\varepsilon_0} \partial^\nu j_\nu$$

$\Rightarrow \boxed{\partial^\nu j_\nu = 0}$ kontinuitási egyenlet (újra írva épp $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}\,\vec{j} = 0$)

Forrásmentes egyenletek:

$\text{div}\,\vec{B} = 0 \Rightarrow \partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = 0$

$\text{rot}\,\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \Rightarrow$ x komp. $\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0$

$$\partial_2 F_{03} + \partial_3 F_{20} + \partial_0 F_{32} = 0$$

y, z $\Rightarrow \partial_1 F_{03} + \partial_3 F_{10} + \partial_0 F_{31} = 0$

$$\partial_1 F_{02} + \partial_2 F_{10} + \partial_0 F_{21} = 0$$

1 egyenletben! $\boxed{\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0 \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma}$

$$\boxed{\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \qquad \underline{\text{duális}}}$$

<u>HF</u> : a fentiek ekvivalensek $\boxed{\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0}$ $\nu = 0, \dots, 3$

$\Rightarrow$ tehát
$$\boxed{\begin{aligned} \partial^\mu F_{\mu\nu} &= \frac{1}{\varepsilon_0} j_\nu \qquad &(\mathrm{I}) \\ \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} &= 0 \qquad &(\mathrm{II}) \end{aligned}}$$

Tfh. $\exists A_\mu(x)$ úgy, hogy $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

$\Rightarrow$ (II) automatikusan teljesül

$$\partial_\alpha(\partial_\beta A_\gamma - \partial_\gamma A_\beta) + \partial_\beta(\partial_\gamma A_\alpha - \partial_\alpha A_\gamma) + \partial_\gamma(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) = 0 \checkmark$$

$A_\mu(x)$ nem egyértelmű $\Rightarrow$ <u>mértékszabadság</u>

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu f(x) \Rightarrow F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu + \partial_\mu\partial_\nu f - \partial_\nu A_\mu - \partial_\nu\partial_\mu f = F_{\mu\nu}$$

$\vec{A}, \phi$ -vel: $\quad \phi' = \phi + \frac{\partial f}{\partial t} \qquad \vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla} f$

Írjuk be (I)-be:

$$\partial^\mu(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = \frac{1}{\varepsilon_0} j_\nu \Rightarrow \Box A_\nu - \partial_\nu(\partial^\mu A_\mu) = \frac{1}{\varepsilon_0} j_\nu$$

mértékválasztás legyen $\boxed{\partial_\mu A^\mu = 0 \quad \underline{\text{Lorentz-mérték}}}$

van-e olyan f, hogy $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu f$-re $\partial^\mu A'_\mu = 0$

$\Rightarrow \partial^\mu A_\mu + \Box f = 0 \Rightarrow \Box f = -\partial^\mu A_\mu$ mindig van megо.

(pl. Green-fv. módszerrel)

Lorentz-mértékben $\quad \Box A_\mu = \frac{1}{\varepsilon_0} j_\mu \quad$ vagy $\Box \phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \quad \Box \vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{j}$

ennek $\Box$ mindig van megо. $\Rightarrow$ mindig létezik A_μ

A_μ-vel könnyebb megoldani az egyenleteket