

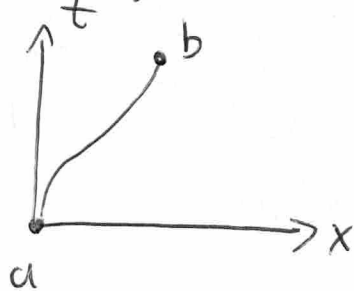
3. előadás

Relativisztikus mechanika

Szabad részecske hatása/Lagrange-fn.-e

adott világvonalra inv. $\Rightarrow$ ívhossz

$$S' = -\alpha \int_a^b ds$$



$\int ds$ -nek max.-a van, nem min. $\Rightarrow \alpha > 0$

$$S' = \int L dt = -\alpha \int ds = -\alpha \int c dt \sqrt{1-v^2/c^2}$$

$$\Rightarrow L = -\alpha c \sqrt{1-v^2/c^2}$$

Nem-relat. limit: $v/c \ll 1$: $\sqrt{1-v^2/c^2} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + O(\frac{v^4}{c^4})$

$$L = -\alpha c \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + O(\frac{v^4}{c^4}) \right) = -\alpha c + \frac{1}{2} \alpha \frac{v^2}{c} + O(\frac{v^4}{c^3})$$

$$= \text{konst.} + \frac{1}{2} m v^2 + O(\frac{v^4}{c^3}) \Rightarrow \alpha = mc$$

$$L = -mc^2 \sqrt{1-v^2/c^2}$$

$$S' = -mc \int ds$$

Energia & impulzus

Általános impulzus

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

$$\text{itt } p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{m v_i}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Ha $v \ll c$ akkor $p_i \approx m v_i$

Energia

$$E = p_i \dot{q}_i - L = \vec{p} \cdot \vec{v} - L = \frac{m v^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + mc^2 \sqrt{1-v^2/c^2}$$

$$\frac{\vec{c} \vec{p}}{E} = \vec{v}$$

$$= \frac{m v^2 + m c^2 (1 - v^2/c^2)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{m c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = E$$

$v=0 \Rightarrow E = mc^2$ nyugalmi tömeg

$$v \ll c \Rightarrow E \approx mc^2 + \frac{1}{2} m v^2 + O(\frac{v^4}{c^2})$$

Hamilton-fn.

$$E^2 = \frac{m^2 c^4 - m^2 c^2 v^2 + m^2 c^2 v^2}{1-v^2/c^2} = m^2 c^4 + c^2 \frac{m^2 v^2}{1-v^2/c^2}$$

$$E = c \sqrt{p^2 + m^2 c^2}$$

$$\xrightarrow{m \rightarrow 0} E = pc$$

$$\xrightarrow{p^2 \ll m^2 c^2} E \approx mc^2 + \frac{p^2}{2m} + \dots$$

Négyesimpulzus

hatás variációja

$$\delta S' = -mc \int_a^b ds = -mc \int_a^b \frac{dx_\mu}{ds} \delta x^\mu = -mc \int_a^b u_\mu \delta x^\mu$$

$\frac{d(\delta x^\mu)}{ds}$ (2)

$$ds = \sqrt{dx_\mu dx^\mu} \Rightarrow \delta ds = \frac{2 dx_\mu \delta x^\mu}{\sqrt{dx_\mu dx^\mu}} = \frac{dx_\mu \delta x^\mu}{ds}$$

parc. int.: $\delta S' = -mc u_\mu \delta x^\mu \Big|_a^b + mc \int_a^b \frac{du_\mu}{ds} \delta x^\mu ds$

mozgásegyenlet: $\delta S' = 0$ miközben $\delta x_{a,b}^\mu = 0 \Rightarrow \frac{du_\mu}{ds} = 0$ állandó négyessebesség

határok változtatása: $\delta x_a^\mu = 0$ $\delta x_b^\mu \neq 0$

$$\delta S' = -mc u_\mu \delta x^\mu$$

Def. $\boxed{p^\mu = -\partial^\mu S' = -\frac{\partial S'}{\partial x_\mu} = mc u^\mu}$ (@)

Elm. mecha ekvivalens

$\frac{\partial S'}{\partial x_1}, \frac{\partial S'}{\partial y}, \frac{\partial S'}{\partial z} \leftarrow$ impulzus
 $-\frac{\partial S'}{\partial t} \leftarrow$ energia

$$\Rightarrow p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) = \left(\frac{mc}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right)$$

(a)

energia és impulzus
egy négyesvektort alkot

Négyesimpulzus megmaradás

Minket határ változhat

$$\delta S' = -p_\mu^{(b)} \delta x_b^\mu + p_\mu^{(a)} \delta x_a^\mu$$

eltolás: $\delta x_a^\mu = \delta x_b^\mu = \delta x^\mu$ szimmetria: $\delta S' = 0$

$$\delta S' = (-p_\mu^{(b)} + p_\mu^{(a)}) \delta x^\mu \Rightarrow p_\mu^{(a)} = p_\mu^{(b)} \text{ megmarad}$$

Tömeghő feltétel

$$u_\mu u^\mu = 1 \Rightarrow \boxed{p_\mu p^\mu = m^2 c^2}$$

$$\boxed{E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4}$$

(3)

Erő négyesvektora

$$F^M = \frac{dp^M}{ds} = mc \frac{du^M}{ds} = mc a^M$$

$$a^M u_M = 0 \Rightarrow F_M u^M = 0$$

ha $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ akkor $F^M = \frac{d}{ds} \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) = \frac{1}{c\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{d}{dt} \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right)$

$$= \left(\frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c^2 \sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{\vec{F}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right)$$

$$\frac{dE}{dt} = \sum_i \frac{\partial E}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} = \sum_i \frac{2c^2 p_i F_i}{2E} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

erő munkájával
kapcsolatos

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$$

Alkalmazások (részecskefizika) $c=1$
[tömeg] = [energia]

Részecskélek bontása

M tömegű $\rightarrow m_1$ és m_2 tömegű

M nyugalmi rendszerekben

$E_1 > m_1$ $E_2 > m_2$ és $M = E_1 + E_2 \Rightarrow M > m_1 + m_2$ ← energiamegmaradás

impulzus megm. $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0 \Rightarrow E_1^2 - m_1^2 = E_2^2 - m_2^2 \Rightarrow E_1^2 - E_2^2 = m_1^2 - m_2^2$

$$\frac{E_1^2 - E_2^2}{E_1 + E_2} = E_1 - E_2 = \frac{m_1^2 - m_2^2}{M} \Rightarrow E_1 = \frac{m_1^2 - m_2^2 + M^2}{2M}$$

$$E_2 = \frac{m_2^2 - m_1^2 + M^2}{2M}$$

Ugyanez fordítva: m_1 és m_2 ütközéséből mekkora M jöhet létre? ④
~~TK rendszerben~~

~~TK rendszerben~~ $\downarrow$ vágó rendszerben $\Sigma p^\mu = (E, 0) = (M, 0)$

Legyen m_2 nyugalomban és ütközzön vele m_1 tömeg E_1 energiával

$m_1, E_1 \rightarrow \quad m_2$

$$p^\mu = (E_1 + m_2, \vec{p}_1) \quad |\vec{p}_1| = \sqrt{E_1^2 - m_1^2}$$

$$M^2 = p^\mu p_\mu = (E_1 + m_2)^2 - \vec{p}_1^2 = (E_1 + m_2)^2 - E_1^2 + m_1^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 E_1$$

Konkrét példa: $m_1 = m_2 = 1 \text{ GeV}$ (proton)

$$E_1 = 7 \text{ TeV} = 7000 \text{ GeV} \quad (\text{LHC})$$

$$\frac{M^2}{\text{GeV}^2} = 1 + 1 + 14000 \Rightarrow M = \sqrt{14002} \text{ GeV} \approx 118.3 \text{ GeV}$$

Ha viszont $m_1 = m_2 = 1 \text{ GeV}$

$$E_1 = E_2 = 7 \text{ TeV} \quad \vec{p}_1 = -\vec{p}_2$$

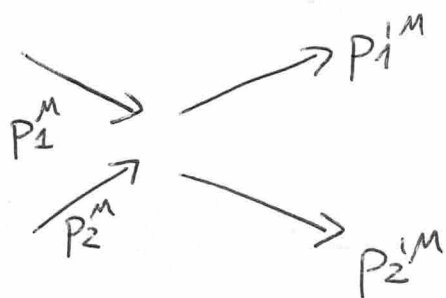
$$\text{teljes } p^\mu = (2E_1, \vec{0}) \Rightarrow M = 2E_1 = 14 \text{ TeV}$$

Több mint

~~100X~~ 100X-es szorzó az ütköztető (collider)
és a (fixed target) kísérlet között M -ben

Rugalmas szórás

(5)



$$p_1^M + p_2^M = p_1'^M + p_2'^M$$

átrendezve:

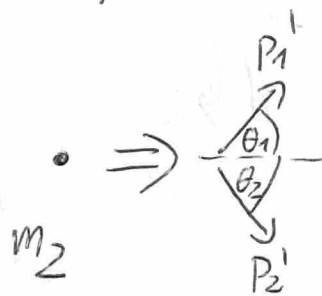
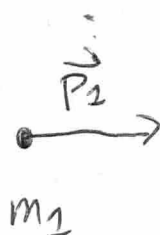
$$p_1^M + p_2^M - p_1'^M = p_2'^M$$

négyzete: $2m_1^2 + m_2^2 + 2(p_1^M p_{2M} - p_1^M p_{1M}' - p_2^M p_{1M}') = m_2'^2$

$$m_1^2 + p_1^M p_{2M} - p_1^M p_{1M}' - p_2^M p_{1M}' = 0 \quad (\#)$$

Hasonlóan: $1 \leftrightarrow 2$: $m_2^2 + p_1^M p_{2M} - p_1^M p_{2M}' - p_2^M p_{2M}' = 0 \quad (\#\#)$

Legyen m_2 eredetileg nyugalomban



Ekkor $p_1^M p_{2M} = E_1 m_2$

$$p_1^M p_{1M}' = E_1 E_1' - p_1 p_1' \cos \theta_1$$

$$p_2^M p_{1M}' = m_2 E_1'$$

(#)

$$\cos \theta_1 = \frac{E_1'(E_1 + m_2) - E_1 m_2 - m_1^2}{p_1 p_1'}$$

$$p_1^M p_{2M}' = E_1 E_2' - p_1 p_2' \cos \theta_2$$

$$p_2^M p_{2M}' = m_2 E_2'$$

$$\cos \theta_2 = \frac{E_2'(E_1 + m_2) - E_1 m_2 - m_2^2}{p_1 p_2'}$$

$$p_1 = \sqrt{E_1^2 - m_1^2}$$

$$p_1' = \sqrt{E_1'^2 - m_1^2}$$

$$p_2' = \sqrt{E_2'^2 - m_2^2}$$

beírva megoldható E_2' -re:

$$E_2' = m_2 \frac{(E_1 + m_2)^2 + (E_1^2 - m_1^2) \cos^2 \theta_2}{(E_1 + m_2)^2 - (E_1^2 - m_1^2) \cos^2 \theta_2}$$

(#) inverzet képezve: $E_1'(\theta_1) \leftarrow$ bonyolult

nézzünk egy egyszerűbb esetet

Compton-szórás $|m_1 \rightarrow 0|$

6

$$E_1 = p_1 \quad E_1' = p_1'$$



$$\cos \theta_1 = \frac{E_1'(E_1 + m_2) - E_1 m_2}{E_1 E_1'} \Rightarrow E_1 E_1' (\cos \theta_1 - 1) - E_1' m_2 = -E_1 m_2$$

$$E_1' = \frac{E_1}{\frac{E_1}{m_2} (1 - \cos \theta_1) + 1}$$

Vissza m_1, m_2 általános esetére, de a TK rendszerben:

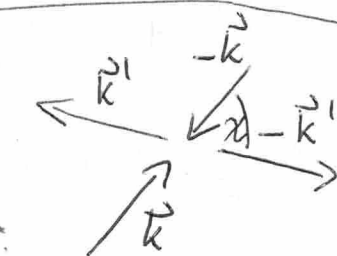
$$(E_1, \vec{k}) \quad (E_2, -\vec{k})$$

energia megmaradás

$$(E_1', \vec{k}') \quad (E_2', -\vec{k}')$$

$$|\vec{k}| = |\vec{k}'| \Rightarrow E_1' = E_1 \text{ és } E_2' = E_2$$

$$P_1^\mu P_{1\mu}' = E_1 E_1' - \vec{k} \vec{k}' = E_1^2 - k^2 \cos \chi = k^2 (1 - \cos \chi) + m_1^2$$



χ : szórási szög

A másik két szorzatot a LAB rendszerben:

$$P_1^\mu P_{2\mu} = E_1 m_2$$

$$P_2^\mu P_{1\mu}' = m_2 E_1'$$

$$m_1^2 + P_1^\mu P_{2\mu} - P_1^\mu P_{2\mu}' - P_2^\mu P_{1\mu}' = 0$$

$$m_1^2 + E_1 m_2 - m_2 E_1' - k^2 (1 - \cos \chi) - m_1^2 = 0$$

$$E_1' - E_1 = -\frac{k^2}{m_2} (1 - \cos \chi)$$

Most fejezzük ki a k^2 -et is a LAB rendszerből:

$$P_1^\mu P_{2\mu} = E_1 m_2 = E_1 E_2 + k^2$$

$$\Rightarrow E_1 m_2 - k^2 = \sqrt{m_1^2 + k^2} \sqrt{m_2^2 + k^2} \Rightarrow k^2 = \frac{m_2^2 (E_1^2 - m_1^2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 E_1}$$

$$\Rightarrow E_1' = E_1 - \frac{m_2 (E_1^2 - m_1^2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 E_1} (1 - \cos \chi)$$

energia megmaradás $\Rightarrow E_1 + m_2 = E_1' + E_2'$

(7)

$$\Rightarrow E_2' = E_1 + m_2 - E_1' = m_2 + \underbrace{\frac{m_2(E_1^2 - m_1^2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 E_1}}_{\text{energiaátadás}} (1 - \cos \chi)$$

energiaátadás

max., ha $\cos \chi = -1$ azaz $\chi = \pi$

$$\Delta E_{\max} = \frac{2 m_2 (E_1^2 - m_1^2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2 m_2 E_1}$$

spec. eset: $m_1 \ll m_2 \Rightarrow \frac{\Delta E_{\max}}{E_1} \approx \frac{2 m_2 E_1}{m_1^2 + 2 m_2 E_1}$

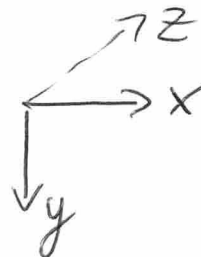
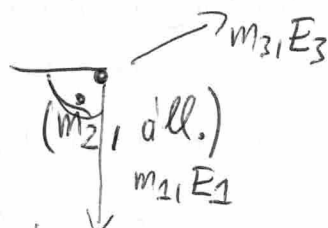
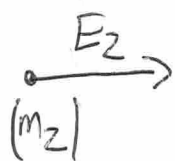
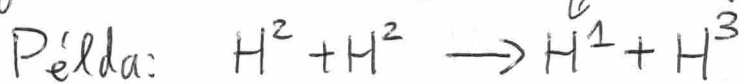
továbbá $E_1 \gg m_2 \Rightarrow \frac{\Delta E_{\max}}{E_1} \rightarrow 1$

Kis tömegű részecské is át tudja adni energiájának nagy részét (relativisztikusan)

Nem-relativisztikusan ez nem igaz

Rugalmatlan ütközés

egyszerűség kedvéért 2D-rezűben



feltételek: — 4-es imp. megm.
— tömegkéj

energia: $m_2 + E_2 = E_1 + E_3$

impulzus: (x) $p_2 = 0 + p_3^x \Rightarrow p_3^x = +p_2$

(y) $0 = p_1 + p_3^y \Rightarrow p_3^y = -p_1$

(z) $0 = 0 + p_3^z \Rightarrow p_3^z = 0$

tömegkéj: $E_2^2 - p_2^2 = m_2^2$

$E_1^2 - p_1^2 = m_1^2$

$E_3^2 - (p_3^x)^2 - (p_3^y)^2 - (p_3^z)^2 = m_3^2$

$\Rightarrow m_3^2 = (m_2 + E_2 - E_1)^2 - p_2^2 - p_1^2 = m_2^2 + m_2^2 + m_1^2 + 2m_2E_2 - 2E_2E_1 - 2m_2E_1$
 $= m_1^2 + 2(m_2 + E_2)(m_2 - E_1) = m_1^2 + 2(2m_2 + T_2)(m_2 - m_1 - T_1)$

T_1, T_2 kin. energiák

$\Rightarrow m_3$ megkapható csak a H^1 és H^2 -k adataiból

Impulzusmomentum

(9)

pontrendszer x_i^M pontokból

Nem-rel. mechanikában

$$\vec{J} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

M_i felel meg ennek?

Legyen x^M egy részecske négyes koord.

Infinitezimális Lorentz-trafo: $x^{M'} - x^M = \delta \Omega^{MV} x_V$

ívhossz invariancia miatt $\delta \Omega^{MV}$ nem tetszőleges:

$$x'^M x'_M = x^M x_M \Rightarrow (x^M + \delta \Omega^{MV} x_V)(x_M + \delta \Omega_{MA} x^A) = x^M x_M$$
$$\Rightarrow x_M x_V \delta \Omega^{MV} = 0 \quad (+ O(\delta \Omega^2) \text{-t elhagyva})$$

$$\Rightarrow \delta \Omega^{MV} \text{ antiszimmetrikus} \Rightarrow \delta \Omega^{MV} = -\delta \Omega^{VM}$$

Hatás megváltozása, ha az $\vec{r}_i$ -k változnak a végpontokban

$$\delta S' = - \sum_i p_i^M \delta x_{iM} \Big|_a^b$$

forgatás/Lorentz

$$\delta x_i^M = \delta \Omega^{MV} x_{iV} \Rightarrow \delta S' = -\delta \Omega_{MV} \sum_i p_i^M x_i^V$$

$$= \delta \Omega_{MV} \sum_i p_i^V x_i^M \Big|_a^b = - \delta \Omega_{MV} \frac{1}{2} \sum_i (p_i^M x_i^V - p_i^V x_i^M) \Big|_a^b$$

$$\text{forgatás szimmetria} \Rightarrow \delta S' = 0 \Rightarrow \sum_i (p_i^M x_i^V - p_i^V x_i^M) \Big|_a^b = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{J^{MV} = \sum_i x_i^M p_i^V - x_i^V p_i^M} \quad \text{megmarad}$$

J^{MV} antiszimmetrikus tenzor, elemei

$$\begin{pmatrix} 0 & J^{01} & J^{02} & J^{03} \\ -J^{01} & 0 & J^{23} & -J^{13} \\ -J^{02} & -J^{23} & 0 & J^{12} \\ -J^{03} & J^{13} & -J^{12} & 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{J} = (J_x, J_y, J_z)$ a 3D impulzusmomentum

M_i a (J^{01}, J^{02}, J^{03}) ?

(10)

$$\vec{I} = \sum_i \left(ct \vec{p}_i - \frac{E_i \vec{r}_i}{c} \right) = \text{konst.}$$

$\hat{L}^{mr}$ megmarad

másfelől az energia $\sum_i E_i$ is megmarad

$$\Rightarrow \frac{\sum_i E_i \vec{r}_i}{\sum_i E_i} - c^2 t \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\sum_i E_i} \quad \text{azaz} \quad t \vec{V} - \vec{R} = \text{konst}$$

azaz a $\vec{R}$ helyvektorú pont $\vec{V}$ sebességgel mozog

TKP rel. def.: $\vec{R} = \frac{\sum_i E_i \vec{r}_i}{\sum_i E_i}$

hiszen $E_i \propto m_i c$ $\frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$

Fontos különbség:

$\vec{R}$ nem egy négyesvektor vektor része/

$\vec{R}$ komponensei nem egy transzformálódnak, mint egy vektor koordinátái