

2. előadás

Négyesvektor formalizmus

Legyen $x^0 = ct$ $x^1 = x$ $x^2 = y$ $x^3 = z \Rightarrow \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$ négyes helyvektor

Lorentz-tr. xt síkban:

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \chi & \sinh \chi & 0 & 0 \\ \sinh \chi & \cosh \chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

jelölés: $\boxed{x^M = \sum_V \Lambda^M_V x^{V'}} = \boxed{\Lambda^M_V x^{V'}}$

Einstein-konvenció (alsó-felső index páron összegzés)

iv elem négyzet $\boxed{ds^2 = (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2}$
 $\boxed{= \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$

$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)_{\mu\nu}$ metrikus tenzor

jelölés: $x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu$ kovariáns komponens
 $x^\mu =$ kontravariáns komponens

$x^\mu = (ct, \vec{x})$ $x_\mu = (ct, -\vec{x})$

$ds^2 = dx^\mu dx_\mu$

felsőindexes $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ $x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu$

ívelem invarianciája

②

$$ds^2 = ds'^2 \Rightarrow \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma dx^\rho dx^\sigma = \eta_{\rho\lambda} dx^{\rho'} dx^{\lambda'}$$

$$\boxed{\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\lambda = \eta_{\rho\lambda}} \quad (*)$$

$$\eta_{\rho\lambda} \eta^{\lambda\sigma} = \delta_\rho^\sigma \Rightarrow \boxed{\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\lambda \eta^{\lambda\sigma} = \delta_\rho^\sigma} \quad (**)$$

$$\Rightarrow \det \Lambda = \pm 1$$

nincs tükrözés



folytonosan összeköthető Λ az egységmatrixal: (hogy * igyat maradj)



$$\det \Lambda = +1$$

Hogyan transzformálódik x_m ?

$$x_m = \eta_{m\nu} x^\nu = \eta_{m\nu} \Lambda^\nu_\sigma x^\sigma = \underbrace{\eta_{m\nu} \Lambda^\nu_\sigma \eta^{\sigma\kappa}}_{\Lambda_m{}^\kappa} x_{\kappa'}$$

$$\boxed{\Lambda_m{}^\kappa = \eta_{m\nu} \Lambda^\nu_\sigma \eta^{\sigma\kappa}}$$

$$(**) \Rightarrow \boxed{\Lambda^\mu_\rho \Lambda_m{}^\sigma = \delta_\rho^\sigma} \quad \text{ívhossz invariancia}$$

$$(\tilde{\Lambda}^T)^\sigma_m := \Lambda_m{}^\sigma$$

majdnem transzponált

$$\left(\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \text{hatched} \\ \hline \text{hatched} & \square \\ \hline \end{array} \right) \leftarrow (-1)\text{-el szorozd le}$$

$$\Lambda^M_P (\Lambda^{\tilde{M}T})^\sigma_M = \delta_P^\sigma$$

majdnem ortogonális transzformáció

(3)

$$MM^T = \mathbb{1} \quad 10 \text{ feltétel}$$

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 16 - 10 = 6 \text{ szabad paraméter}$$

$$3 \text{ forgatás, } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{pl. } O = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

(yz síkban)

3 boost: tx, ty, tz síkban

$$\text{pl. } (tx) \begin{pmatrix} \cosh \chi & \sinh \chi & 0 & 0 \\ \sinh \chi & \cosh \chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Négyesvektorok általánosán:

$\rightarrow \phi$ skalar, ha $\exists K$ részben azonos az értéke

$\rightarrow 4\text{db } A^M$ mennyiség négyesvektor, ha

$$A^M = \Lambda^M_\nu A^\nu$$

kovariáns $A_M = \eta_{M\nu} A^\nu$

vektor "hossz négyzete" $A^2 = \eta_{M\nu} A^M A^\nu$

két vektor skalárszorzata $A \cdot B = \eta_{M\nu} A^M B^\nu = A^M B_M$

$A^M B_M$ invariáns

HF1: Biz. ké.

néhány célrérőltető szöveg bontása $A^M = (A^0, \vec{A}) \quad A_M = (A^0, -\vec{A})$

Tenzorok

(4)

16 db mennyiség A^{mv} kétindexes tenzor, ha

$$A^{mv} = \Lambda^m_p \Lambda^v_\sigma A^{p\sigma}$$

indexek fel-le húzhatóak:

$$A_m{}^v = \eta_{m\sigma} A^{\sigma v}$$

és

$$A^m{}_v = \eta_{v\sigma} A^{m\sigma}$$

és

$$A_{mv} = \eta_{mp} \eta_{v\sigma} A^{p\sigma}$$

...

$$A_{00} = A^0{}_0 = A_0{}^0 = A^{00}$$

$$A_{0i} = -A^{0i} = A^0{}_i = -A_0{}^i$$

$$A_{ij} = -A^i{}_j = -A_i{}^j = +A^{ij}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{jelölés:} \\ i, j \in \{1, 2, 3\} \end{array} \right)$$

Spec. tenzorok

egységtenzor

$$\delta^m_v A^v = A^m$$

$\forall A$ négyvektorra

$$\delta^m_v = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$$

indexet lehúzva

$$\eta_{mv} \delta^v_\sigma = \eta_{m\sigma}$$

$\Rightarrow \delta$ és η azaz, csak δ -nak fent lent indexei vannak

$$A^{mv} = A^{vm}$$

szimmetrikus (10 fdben komponens)

$$A^{mv} = -A^{vm}$$

antiszimmetrikus (6 - 11 -)

csak térbeli forgatásokra

A^{ij}

3D tenzor

A^{i0} és A^{0i} 3D vektor

5

teljesen antiszimmetrikus tenzor

ϵ^{MNPQ}

$$\epsilon^{0123} = 1$$

$24 = 4!$ eleme $\neq 0$

$$\epsilon^{MNPQ} \epsilon_{MNPQ} = -24$$

néhány hasznos tulajdonság

$\epsilon^{MNPQ} \epsilon_{KVPQ} = -\delta^M_K$

$\epsilon^{MNPQ} \epsilon_{KAPQ} = -2(\delta^M_K \delta^N_A - \delta^M_A \delta^N_K)$

előjel megjegyzésekhez



tértábrózás: skálár / pszeudoskálár

↑
nem vekt

↑
vekt előjel

vektor: előjel vekt

axiávektor: nem vekt

pl.: $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ ahol $\vec{A}$ és $\vec{B}$ vektor

$\Rightarrow \vec{C}$ axiávektor, pl. impulzusmomentum

$$(\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p})$$

antiszim. 4-es tenzor:

(6)

$$A^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & a_x & a_y & a_z \\ -a_x & 0 & -b_z & b_y \\ -a_y & b_z & 0 & -b_x \\ -a_z & -b_y & b_x & 0 \end{pmatrix} \quad \vec{a} \text{ vektor} \\ \vec{b} \text{ axiálvektor}$$

Mezők: tér-idő pontoktól függő skalar/vektor/tenzor értékű fn.-ek

skalármező pl. hőmérséklet $T(x) = T'(x')$

$$T(x) = T'(x') = T'(\Lambda^{-1}x)$$

vektormező $V^\mu(x) = \Lambda^\mu_\nu V'^\nu(x')$

$$V^\mu(x) = \Lambda^\mu_\nu V'^\nu(\Lambda^{-1}x)$$

tenzor mező $A^{\mu\nu}(x) = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma A^{\rho\sigma}(\Lambda^{-1}x)$

kovariáns egyenletek: azonosan transzformálódó mennyiségek közötti egyenlőség

$\Rightarrow \exists K$ -ban azonos alakúak

relativitás elve $\Rightarrow \forall$ fiz. törvény felírható kovariáns egyenlettel

ehhez kell: diff. operátorok

Kovariáns diff. operátorok

(7)

F : skálármező

$$dF = \sum_m \frac{\partial F}{\partial x^m} dx^m$$

dx^m 4-es vektor, dF skálár $\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x^m}$ négyes vektor
(kontrav.) (kovariáns)

$\Rightarrow$ skálármező gradiense 4-es vektor mező

jelölés $\frac{\partial}{\partial x^m} = \partial_m \Rightarrow dF = (\partial_m F) (dx^m)$

$$\partial_m = \left(\frac{1}{c} \partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z \right)$$

$$\partial^m = \left(\frac{1}{c} \partial_t, -\partial_x, -\partial_y, -\partial_z \right)$$

$$\partial_m \partial^m = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2 - \partial_z^2 = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta = \square$$

hullám operátor $\rightarrow$ skálár

Pl. ϕ skálármező

$$\square \phi = 0 \text{ skálár egyenlet}$$

síkhullám megoldásai

$$\phi(x) = e^{\pm i k_m x^m} = e^{\pm i k^m x_m}$$

$$\partial_m \phi = \pm i k_m e^{\pm i k_n x^n} = \pm i k_m e^{\pm i k_n x^n}$$

$$\square \phi = -k^m k_m e^{\pm i k_n x^n} = 0 \Rightarrow \boxed{k_m k^m = 0}$$

{ relativitás elve ✓
leírja-e a természetben vmi
 ϕ mező viselkedését? kísérlet

HF2:

hogyan transzformálódik egy
x tengellyel párhuzamos

szimm./antiszimm.
Lorentz-boost esetén

tenzor komponensei

Négyessebesség

(8)

$\frac{dx^M}{dt}$ nem 4-es vektor

x^M négyesvektor

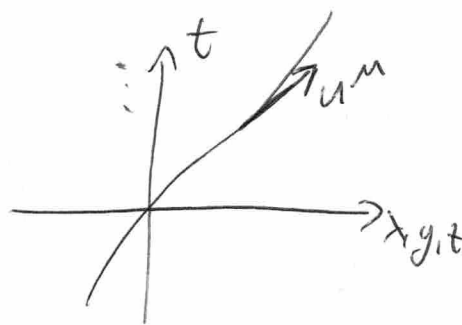
s (irahossz): skalar

$$\boxed{u^M := \frac{dx^M}{ds}} \Rightarrow \text{négyesvektor, dimenziótlán}$$

$$ds = c dt \sqrt{1 - v^2/c^2} \Rightarrow u^M = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)$$

$$u_M u^M = \frac{1}{1 - v^2/c^2} - \frac{v^2}{c^2} \frac{1}{1 - v^2/c^2} = 1$$

a világvonal egység hosszúságú érintővektora



Négyesgyorsulás

$$a^M = \frac{d^2 x^M}{ds^2} = \frac{du^M}{ds}$$

$$u^M u_M = 1 \xrightarrow{\frac{d}{ds}} a^M u_M + u^M a_M = 0 \Rightarrow \sum_{M,N} g_{MN} a^M u^N = 0$$
$$a^M u_M = 0$$

a^M és u^M ortogonális

Egyszerűen gyorsuló mozgás

def.: négyesgyorsulás a sajátrendszerekben konstans

$$ds = c dt \Rightarrow a^0 = \frac{d^2(ct)}{ds^2} = 0$$

$$a^1 = \frac{d^2 x^1}{ds^2} = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{a}{c^2}$$

legyen x irányú:

$$a^M = (0, \frac{1}{c^2}, 0, 0)$$

Labor rendszer: $a^M = \Lambda^M_{\nu} a^{\nu'} = \begin{pmatrix} \cosh \chi & \sinh \chi \\ \sinh \chi & \cosh \chi \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ a/c^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{a}{c^2} \begin{pmatrix} \sinh \chi \\ \cosh \chi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow a^M = \frac{a}{c^2} \begin{pmatrix} \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ és $u^M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1-v^2/c^2} \\ v/\sqrt{1-v^2/c^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$a^M = \frac{du^M}{ds} = \frac{1}{c\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{du^M}{dt} \xrightarrow{n=1} \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = \frac{a}{c^2}$

$\Rightarrow \frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = at + \text{konst.}$

Ha $t=0$ $v=0 \Rightarrow \text{konst.} = 0 \Rightarrow v = \frac{at}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}}$

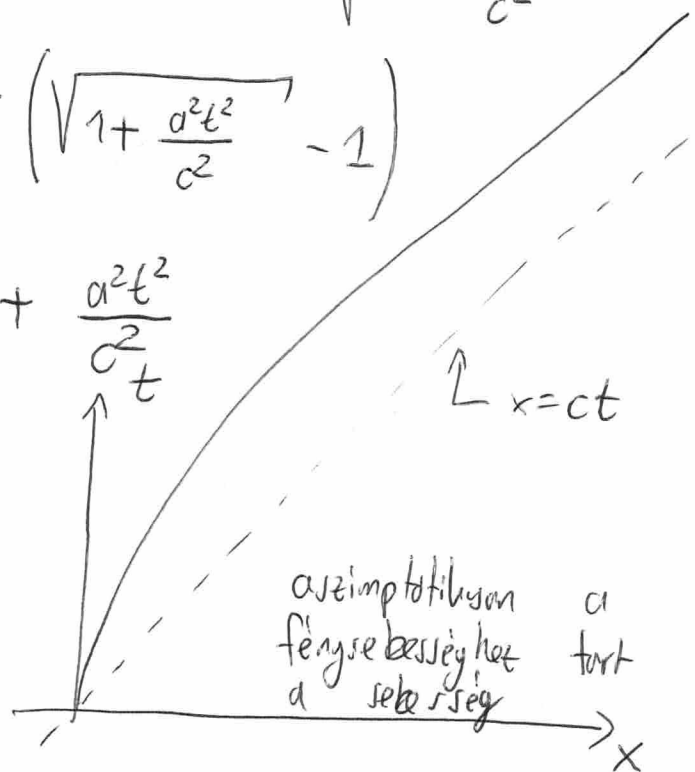
$x = x_0 + \int_0^t v dt = x_0 + \frac{c^2}{a} \left(\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} - 1 \right)$

Ha $x_0 = 0$ $\left(\frac{ax}{c^2} + 1 \right)^2 = 1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}$

$\sim x^2 - t^2 = \text{konst.}$ hiperbola

t és x nagy

$\frac{a^2 x^2}{c^4} \approx \frac{a^2 t^2}{c^2} \Rightarrow x \approx ct$



sajd idő

$$\tau = \int_0^t dt \sqrt{1 - v^2/c^2} = \int_0^t dt \sqrt{1 - \frac{a^2 t^2}{c^2 + a^2 t^2}} = \int_0^t dt \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{c}{a} \operatorname{arsh} \frac{at}{c}$$

Pl.:

$$a = g \approx 10 \text{ m/s}^2$$

$$x = 100 \text{ fényév} = 9,46 \cdot 10^{17} \text{ m}$$

$$t = 100,95 \text{ év}$$

$$\tau = 5,09 \text{ év}$$