

Kiterjesztett Schwarzschild-megoldás, fekete lyuk

Radialis / $\dot{\varphi} = 0 \Leftrightarrow j=0$ fényszerű geodetikusok

$$\epsilon = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \dot{t}$$

$$L = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 = 0$$

$$(\dots) = \frac{d}{d\sigma} (\dots)$$

$$\dot{r}^2 = \epsilon^2$$

$$\dot{r} = \pm \epsilon$$

↑ befelé / kifelé

$$\frac{dt}{dr} = \frac{\dot{t}}{\dot{r}} = \pm \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}$$

↑ befelé / kifelé

befelé menő

$$r = r_0 - \epsilon \sigma$$

$$t = -[r + 2GM \ln(r - 2GM)] + \text{konst.}$$

Véges σ affinparaméternél, de $t = -\infty$ -ben éri el a Schwarzschild-sugarat

Eddington-Finkelstein koordináták

$$v = t + r + 2GM \ln(r - 2GM)$$

↓ HF

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dv^2 - 2dvdr - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

radikálisan befelé geodetikus:

$$v = \text{const.}$$

$$r = r_0 - \epsilon \sigma$$

kifelé menő

$$r = r_0 + \epsilon \sigma$$

$$t = r + 2GM \ln(r - 2GM) + \text{konst.}$$

Véges σ affin param.-nál, de $t = -\infty$ -ben hagyta el a Sch.-sug.

$$u = t - r - 2GM \ln(r - 2GM)$$

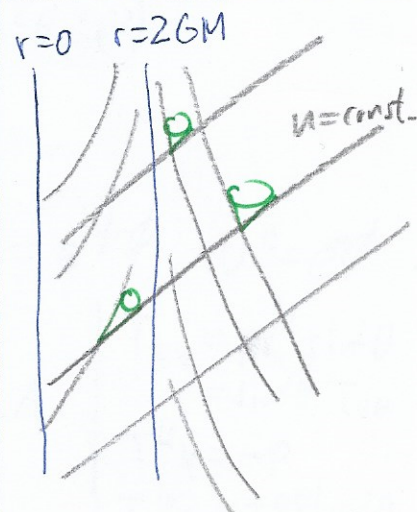
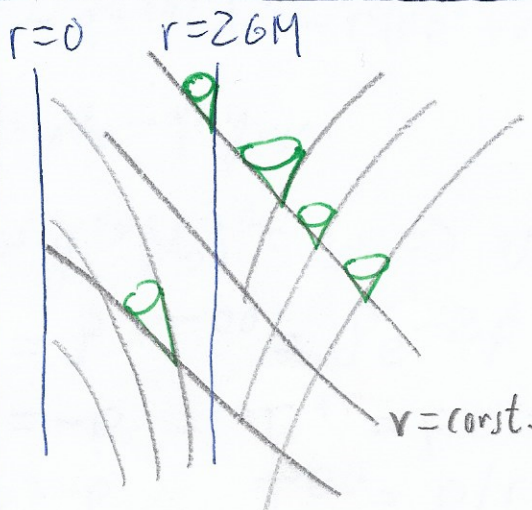
↓ HF

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) du^2 + 2du dr - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

kifelé:

$$u = \text{const.}$$

$$r = r_0 + \epsilon \sigma$$



(u, r, θ, φ) és (v, r, θ, φ) koordinátákban nincs
szingularitás $r = r_s = 2GM$ -ben! Koordinata-szingularitás

(18)

$r=0$ -ban, van, és ez koord. tr.-val nem tüntethető el,
mert (HF)

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{48G^2 M^2}{r^6} \rightsquigarrow \text{skalár}$$

tehát ebben a pontban maga a téridő szinguláris

Javasolt HF: idősuró ($m > 0$) radialis geodetikus
mozgásban r_0 sugaránál

— véges srgdts adatt $r \rightarrow 0$

— ∞ t időhord $r \rightarrow r_s = 2GM$

Gömbszimmetrikus csillagok

(19)

Newtoni elmélet Euler: $\rho(\dot{V}_i + V_j \partial_j V_i) = -\partial_i p - \rho \partial_i \phi$

$\xrightarrow{\text{statikus}}$ $\boxed{\partial_i p = -\rho \partial_i \phi}$

$$f(r) \Rightarrow \partial_i f(r) = \frac{x_i}{r} f'(r) \Rightarrow \boxed{p'(r) = -\rho \phi'(r)}$$

$$\partial_j \partial_j f(r) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r)$$

$$\Delta \phi = 4\pi G \rho \Rightarrow \boxed{\phi''(r) + \frac{2}{r} \phi'(r) = 4\pi G \rho}$$

$$(r^2 \phi')' = r^2 \phi'' + 2r \phi' = 4\pi G \rho r^2$$

$$\Rightarrow \phi'(r) = \frac{4\pi G}{r^2} \int_0^r \rho(r') (r')^2 dr' = \frac{G m(r)}{r^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') (r')^2 dr' \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \boxed{p'(r) = -\frac{G \rho(r) m(r)}{r^2}}$$

Relativisztikus elmélet (Tolman-Oppenheimer-Volkoff)

$r > R$: Schwarzschild

$$r < R: ds^2 = B(r) dt^2 - A(r) dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

$$ds^2 = e^{2\phi(r)} dt^2 - e^{2\lambda(r)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}$$

$$g^{\mu\nu} u_\mu u_\nu = g^{00} (u_0)^2 = 1 \Rightarrow u_0 = e^{\phi} \quad u^0 = e^{-\phi}$$

$$T_{00} = \rho e^{2\phi}$$

$$T^0_0 = \rho \quad T^{00} = \rho e^{-2\phi}$$

$$T_{rr} = p e^{2\lambda}$$

$$T^r_r = -p$$

$$T^{rr} = p e^{-2\lambda}$$

$$T_{\theta\theta} = p r^2$$

$$T^\theta_\theta = -p$$

$$T^{\theta\theta} = p/r^2$$

$$T_{\varphi\varphi} = p r^2 \sin^2 \theta$$

$$= \sin^2 \theta T_{\theta\theta}$$

$$T^\varphi_\varphi = -p$$

$$T^{\varphi\varphi} = T^{\theta\theta} / \sin^2 \theta$$

$$\nabla_M T^M_r = \partial_M T^M_r + T^M_{M\lambda} T^\lambda_r - T^\lambda_{Mr} T^M_\lambda$$

(20)

$$\begin{aligned} &= \partial_r T^r_r + \cancel{T^r_{rr} T^r_r} + \cancel{T^t_{er} T^r_r} + \cancel{T^t_{er} T^r_r} \\ &\quad + T^t_{tr} T^r_r \\ &\quad - \cancel{T^r_{rr} T^r_r} - \cancel{T^t_{er} T^t_e} - \cancel{T^t_{er} T^t_e} \\ &\quad - T^t_{tr} T^t_t \end{aligned}$$

↑
nincs
szumma

$$= -p'(r) + \underbrace{T^t_{tr}}_{\frac{B'}{2B}} (-p - \rho) \Rightarrow \boxed{p'(r) = -(\rho + p) \phi'(r)}$$

(a)

Newtoni elméletben itt ρ volt

jelölés: $Gm(r) = \frac{1}{2} r [1 - e^{-2\lambda(r)}]$



$$g_{rr} = A(r) = e^{2\lambda(r)} = \left[1 - \frac{2Gm(r)}{r} \right]^{-1}$$



$$\boxed{m'(r) = 4\pi \rho(r) r^2}$$

Newtoni alakja ez volt

$$R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R = 8\pi G T_{00}$$

(HIF)

$m(r)$ = tömeg függvény

$\Rightarrow$
 $R_{rr} \dots$ (HIF)

$$(b) \quad \boxed{\phi'(r) = \frac{Gm(r) + 4\pi r^3 p(r)}{r(r - 2Gm(r))}}$$

Newtoni $\phi' = \frac{Gm(r)}{r^2}$ volt

$\frac{-(a)}{\rho + p} = (b) \Rightarrow$

$$\boxed{p'(r) = -\frac{(\rho + p)(Gm + 4\pi r^3 p)}{r(r - 2Gm)}}$$

Newtoni $p' = -\frac{Gm\rho}{r^2}$ volt

integrálás

$$m'(r) = 4\pi r^2 \rho(r)$$

$$p'(r) = -(\rho + p)(6m(r) + 4\pi r^3 p(r)) / [r(r - 26m(r))]$$

(21)

kezdeti feltétel: $m(r=0) = 0$

$p(r=0) \leftarrow$ paraméter

a csillag felszíne $p(R) = 0$

a csillag tömege $m(R) \equiv M$

FEHÉR TÖRPE

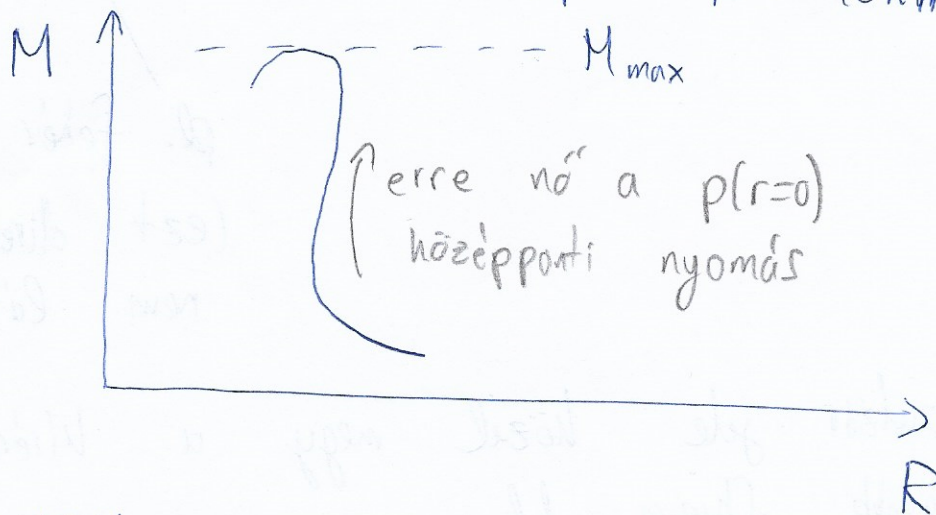
$$M \sim M_{\text{Nap}}$$

$$R \sim R_{\text{Föld}}$$

NEUTRONCSILLAG

$$M \sim M_{\text{Nap}}$$

$$R \sim 10 \text{ km}$$



$p(\rho)$ NEM ISMERT

NEUTRONCSILLAGOKRA

$\Rightarrow$ ha a csillagászok találtnak egy



jó nehéz neutroncsillagot,
akkor hi tudnak zérni
bizonyos állapotegyenleteket

Mérs: Rekorder: $M \approx 2M_{\text{Nap}}$ (2010, ^{hecsőbb} találtak még ^{hasonlóan} nehezéket) 22

mérés alapelve: Shapiro időkézés

bináris pulzár: pulzár + kísérő

↗
mágnezett, forgó neutroncsillag
↖
nagyon precíz periódusi jelet ad

pl. fehér törpe
(ezt közvetlenül
nem látjuk)

ha a pulzár jele közel megy a kísérőhöz
→ nagyobb Shapiro delay

illetve az adatokra → kísérő tömeg és pályája
→ pulzár tömege