

Az általános relativitáselmélet klasszikus kísérleti tesztjei

④

Einstein, 1910-es évek:

1. Merkúr perihéliumprecessziója
→ már ismert csillagászati anomália volt

2. Fényelhátlás

Eddington 1919 ~ napfogyatkozás alatt

3. Gravitációs vöröseltolódás
Popper 1954 ~ eld. precíz fehér törpés mérés
Pound & Rebka 1959 ~ Föld grav. tereken
Adams 1925 ~ Sirius B fehér törpe
(nem mozgatható)

4. Shapiro delay

Ezeket fogjuk most röviden megbeszélni (nem a tényleges kísérleteket, csak az elméleti jóslatokat) ← 1,3-at 2 ← jövő hét

Newtoni limit

①

$$v/c \ll 1$$

$$v = O(\epsilon)$$

$$\epsilon \ll 1$$

változó egy $\ll$ egy fényévben

②

$$\left(\frac{1}{c}\right) \text{ időderis.} \ll \text{ térderis.}$$

$$\left(\frac{1}{c}\right) \frac{\partial f}{\partial t} = O(\epsilon) \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

③

$$\exists \text{ koord. } r., \text{ ahol } g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \epsilon h^{\mu\nu}$$

$$\text{ahol } h^{\mu\nu} = \eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} h_{\alpha\beta}$$

Christoffel-szimbólumok

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} (\partial_{\beta} g_{\gamma\delta} + \partial_{\gamma} g_{\beta\delta} - \partial_{\delta} g_{\beta\gamma}) = \frac{1}{2} \epsilon \eta^{\alpha\delta} (\partial_{\beta} h_{\gamma\delta} + \partial_{\gamma} h_{\beta\delta} - \partial_{\delta} h_{\beta\gamma}) + O(\epsilon^2)$$

$$\frac{d^2 x^{\alpha}}{ds^2} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} \frac{dx^{\beta}}{ds} \frac{dx^{\gamma}}{ds} = 0 \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{dx^i}{ds} &= \frac{dt}{ds} \frac{dx^i}{dt} = O(\epsilon) \quad i=1,2,3 \\ \frac{dx^0}{ds} &= \frac{dt}{ds} = 1 + O(\epsilon) \end{aligned} \right\} \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{00} \approx 0$$

$$\Gamma^i_{00} = -\frac{1}{2} \epsilon (\partial_0 h_{0i} + \partial_0 h_{0i} - \partial_i h_{00}) + O(\epsilon^2) = +\frac{1}{2} \epsilon \partial_i h_{00} + O(\epsilon^2)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 x^i}{dt^2} \approx -\Gamma^i_{00} \approx -\frac{1}{2} \epsilon \partial_i h_{00} \stackrel{!}{=} -\partial_i \phi \leftarrow \text{nemrel. grav. potenciál}$$

ezt már korábban is láttuk, csak máshogy

$$\Rightarrow \overline{g_{00}} = 1 + \epsilon h_{00} + O(\epsilon^2) \stackrel{!}{=} 1 + 2\phi + O(\epsilon^2) \Rightarrow \epsilon h_{00} = 2\phi \quad (2)$$

$$R_{\alpha\beta} = \partial_\beta T^\beta_{\alpha} - \partial_\alpha T^\beta_{\beta} + O(\epsilon^2)$$

$$\overline{R_{00}} = -\partial_i T^i_{00} + O(\epsilon^2) = -\frac{\epsilon}{2} \partial^i \partial_i h_{00} + O(\epsilon^2) = \Delta\phi + O(\epsilon^2)$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu} (1/c^4) \Rightarrow \text{trace} \quad R - \frac{1}{2}(4)R = 8\pi G T^\mu{}_\mu (1/c^4)$$

$$\Rightarrow R_{\mu\nu} = 8\pi G (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^\rho{}_\rho) (1/c^4)$$

$$T_{\mu\nu} \cong \text{diag}(\rho c^4, 0, 0, 0) \quad T^\rho{}_\rho = g^{\rho\sigma} T_{\rho\sigma} \cong \rho c^4$$

$$\Delta\phi = R_{00} = 8\pi G (1/c^4) (T_{00} - \frac{1}{2} g_{00} T^\rho{}_\rho) \cong 4\pi G \rho \quad \text{Gauss-tétel a grav. mezőre (nemrel. lineáris)}$$

Gravitáció idődiláció/vöröseltolódás

Egy óra tetszőleges grav. térben, $K' \leftarrow$ lok. inerciarendszer, nyugalomban $(u^\mu = (1, \vec{0}))$

~~az óra~~ $\Delta t = \sqrt{g_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu} = \sqrt{g_{\mu\nu}(x) \Delta x^\mu \Delta x^\nu}$

hetegéseli közti idő grav. nélkül (amire a gyórtól helybrólta az órá)

$\Delta t = \sqrt{g_{00}} \sqrt{\Delta x_0^2}$

$\frac{\Delta x_0}{\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}$

Ezt az idődilációs faktort nem tudjuk megmérni, mert ha vészünk egy másik órá az is így változik

De meg tudjuk mondani, ha két fix pontban különbözik a faktor.

③ x_2 -ben van egy atomi órámenet aminek periódusideje Δt lenne grav. nélkül, akkor az x_2 -ben

$$\Delta t_2 = \Delta t / \sqrt{g_{00}(x_2)}$$

úez az órámenet az x_1 pontban

$$\Delta t_1 = \Delta t / \sqrt{g_{00}(x_1)}$$

az atomi órámenet frekvenciája $\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \sqrt{\frac{g_{00}(x_2)}{g_{00}(x_1)}}$

Az effektus itt a naprendszerben nagyon kicsi.

gyenge tér $g_{00} \approx 1 + 2\phi$ $\phi \ll 1$

$$\left. \begin{array}{l} \nu_2 = \nu + \Delta\nu \\ \nu_1 = \nu \end{array} \right\} \frac{\nu_2}{\nu_1} \approx 1 + \frac{\Delta\nu}{\nu} = \left(\frac{1 + 2\phi_2}{1 + 2\phi_1} \right)^{1/2} \approx 1 + (\phi_2 - \phi_1)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\Delta\nu}{\nu} \approx \phi(x_2) - \phi(x_1)} \quad \begin{array}{l} \phi_2 \equiv \phi(x_2) \\ \phi_1 \equiv \phi(x_1) \end{array}$$

pl. Nap tömege $M \approx 1.97 \cdot 10^{33} \text{ g}$
sugara $R \approx 0.695 \cdot 10^6 \text{ km}$

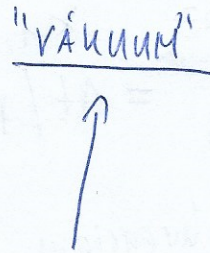
$$\Rightarrow \phi_{\text{Nap felzárna}} - \phi_{\text{végtelen messze}} = \phi_{\text{Nap felzárna}} = -\frac{GM}{R} \approx -2 \cdot 10^{-6}$$

Nagyon kicsi effektus, ezért sikerült csak évtizedekkel később kimutatni, de fontos mert az ekvivalenciaelvet magot testesíti.

Gömbszimmetrikus megoldások (statikus, gömbszimm.)

(4)

A Merkur polgárdok és a fényelhajlásnak a teszteléséhez tudnunk kell, hogy milyen egy gömbszimm. csillag grav. tere



$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = T_{\mu\nu}$$

$$R_{\mu\nu} = 0$$

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_{\mu}u_{\nu} - pg_{\mu\nu}$$

Schwarzschild-megoldás

csillag felszét
irja le (gömbszimm.)

ezt tesztelik a hl. tereték, ezért
mindjárt levezetjük

hidrosztatikai egyensúly)

Tolmann-Oppenheimer-Volkoff-egyenlet Ma nem lehet róla szó

A belső (TOV) és a külső (Sch) megoldások illeszkednek egymáshoz.

GÖMBSZIMMETRIKUS MEGOLDÁSOK

$C=1$ ⑤

Általános statikus izotrop metrika

$\exists$ "hvdezi-Minkowski" koord., ahol a metrika t fén
illetve ds az $\vec{x}$ és $d\vec{x}$ -től csak forgásinn.
mennyiségeken keresztül függ (ezek: $\vec{x}^2$, $\vec{x} \cdot d\vec{x}$, $d\vec{x}^2$)
($r = |\vec{x}| = \sqrt{\vec{x}^2}$)

$$ds^2 = F(r) dt^2 - 2E(r) dt (\vec{x} \cdot d\vec{x}) - D(r) (\vec{x} \cdot d\vec{x})^2 - C(r) d\vec{x}^2$$

térbeli polárkoord.: $\vec{x} = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$

$$ds^2 = F(r) dt^2 - 2r E(r) dt dr - r^2 D(r) dr^2 - C(r) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

vagy időkoordináta: $t' \equiv t + \phi(r)$

$$dt' = dt + \phi'(r) dr$$

~~szorz~~
$$F(r) dt'^2 = F(r) dt^2 + F(r) 2\phi'(r) dt dr + [\phi'(r)]^2 dr^2$$

hússik a $dt dr$ -es tag, ha:

$$F(r) 2\phi'(r) = -2r E(r) \Rightarrow \boxed{\phi'(r) = -\frac{r E(r)}{F(r)}}$$

$$\Rightarrow ds^2 = F(r) dt'^2 - G(r) dr^2 - C(r) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

$$\text{ahol } G(r) = r^2 \left(D(r) - \frac{E^2(r)}{F(r)} \right)$$

vagy sugar koordináta $r'^2 = C(r) r^2$

$$\Rightarrow \boxed{ds^2 = B(r') dt'^2 - A(r') dr'^2 - r'^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)}$$

ahol $B(r') = F(r)$

$$A(r') = \left[1 + \frac{G(r)}{C(r)} \right] \left[1 + \frac{r}{2C(r)} \frac{dC}{dr} \right]^{-2}$$

"elfejtjük" a verszőket:

6

$$ds^2 = B(r) dt^2 - A(r) dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

$$-g_{rr} = A(r) \quad -g_{\theta\theta} = r^2 \quad -g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \theta \quad -g_{tt} = -B(r) \quad \text{többi } 0$$

$$-g^{rr} = \frac{1}{A(r)} \quad -g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2} \quad -g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \quad -g^{tt} = -\frac{1}{B(r)}$$

determináns: $g = -A(r) r^4 B(r) \sin^2 \theta$

$$\sqrt{-g} dr d\theta d\varphi = r^2 \sqrt{A(r) B(r)} \sin \theta d\theta dr d\varphi \quad \text{invariáns térfogatelem}$$

(Christoffel-szimbólumok $\frac{1}{2} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$)

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_{\mu} g_{\rho\nu} + \partial_{\nu} g_{\rho\mu} - \partial_{\rho} g_{\mu\nu})$$

$$\Gamma^r_{rr} = \frac{1}{2A(r)} \frac{dA}{dr} \quad \Gamma^r_{\theta\theta} = \frac{1}{2} g^{rr} (-\partial_r g_{\theta\theta}) = -\frac{r}{A(r)}$$

$$\Gamma^r_{\varphi\varphi} = -\frac{r \sin \theta}{A(r)} \quad \Gamma^r_{tt} = \frac{1}{2A(r)} \frac{dB}{dr}$$

$$\Gamma^{\theta}_{r\theta} = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} (\partial_r g_{\theta\theta} + \partial_{\theta} g_{r\theta} - \partial_{\theta} g_{r\theta}) = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \partial_r g_{\theta\theta} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} (\partial_{\varphi} g_{\theta\varphi} + \partial_{\varphi} g_{\theta\varphi} - \partial_{\theta} g_{\varphi\varphi}) = -\sin \theta \cos \theta$$

$$\Gamma^{\varphi}_{r\varphi} = \Gamma^{\varphi}_{\varphi r} = g^{\varphi\varphi} \frac{1}{2} (\partial_r g_{\varphi\varphi} + \partial_{\varphi} g_{r\varphi} - \partial_{\varphi} g_{r\varphi}) = \frac{2r \sin^2 \theta}{2r^2 \sin^2 \theta} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = \Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta} = g^{\varphi\varphi} \frac{1}{2} (\partial_{\theta} g_{\varphi\varphi} + \partial_{\varphi} g_{\theta\varphi} - \partial_{\varphi} g_{\theta\varphi}) = \frac{r^2 2 \sin \theta \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} = \cot \theta$$

$$\Gamma^t_{tr} = \Gamma^t_{rt} = g^{tt} \frac{1}{2} (\partial_t g_{tr} + \partial_r g_{tt} - \partial_r g_{tt}) = \frac{1}{2B(r)} \frac{dB}{dr}$$

$\Rightarrow$
(HIF)

$$R_{rr} = \frac{B''(r)}{2B(r)} - \frac{1}{4} \frac{B'(r)}{B(r)} \left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - \frac{1}{r} \frac{A'(r)}{A(r)} \quad (7)$$

$$R_{\theta\theta} = -1 + \frac{r}{2A(r)} \left(-\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) + \frac{1}{A(r)}$$

$$R_{\varphi\varphi} = \sin^2 \theta R_{\theta\theta}$$

$$R_{tt} = -\frac{B''(r)}{2A(r)} + \frac{1}{4} \frac{B'(r)}{A(r)} \left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - \frac{1}{r} \frac{B'(r)}{A(r)}$$

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad \mu \neq \nu$$

Schwarzschild-megoldás

$$R_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \text{elegendő, ha } R_{rr} = 0 \quad R_{\theta\theta} = 0 \quad R_{tt} = 0$$

$$\frac{R_{rr}}{A} + \frac{R_{tt}}{B} = -\frac{1}{rA} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) = 0 \Rightarrow \frac{A'}{A} = -\frac{B'}{B} \Rightarrow \boxed{\frac{A(r)B(r)}{= \text{konst.}}}$$

peremfeltétel: $r \rightarrow \infty$ a metrika $\rightarrow$ Minkowski

$$\Rightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} B(r) = 1 \Rightarrow A(r) = 1/B(r)$$

$$\Rightarrow R_{\theta\theta} = -1 + B'(r)r + B(r)$$

$$R_{rr} = \frac{B''(r)}{2B(r)} + \frac{B'(r)}{rB(r)} = \frac{R'_{\theta\theta}}{2rB(r)} \Rightarrow \text{elegendő, ha } R_{\theta\theta} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dr}(rB(r)) = rB'(r) + B(r) = 1 \Rightarrow rB(r) = r + \text{const.}$$

$$\Rightarrow B(r) = 1 + \text{const.}/r$$

$r \rightarrow \infty$ legyen Newtoni limit, ahol $g_{tt} = 1 + 2\phi$

$$\Rightarrow \boxed{B(r) = 1 - \frac{2GM}{r}} \quad \boxed{A(r) = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}}$$

(8)

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \quad (*)$$

úgy néz ki, mintha szinguláris lenne $r_{Sch} = 2GM$ -nél
Schwarzschild-sugár

Allítan ez egy koord. szingularitás, azaz $\exists$ koord. r , ahol nem
 (ez most nem fogjuk követni)

DE: az már most is látszik, hogy van egy nagy
 fizikai effektus $r = r_s$ -nél:

$$\Delta t / \sqrt{g_{00}} = \Delta t / \sqrt{1 - \frac{2GM}{r}} \xrightarrow{r \rightarrow r_s^+} \infty$$

azaz, ahogy egy forrás közelít a Sch.-sugárhoz,
 a gravitáció vártelátelése / periódusideje végtelenül nő / csökken $\rightarrow \infty$

A csillagok tárgyalásánál ez nem merül fel, mert

pl. $R_{Nap} \approx 700,000 \text{ km}$ míg $2GM_{Nap} \approx 3 \text{ km}$

és a csillagok körül már nem a vákuumot kell

egyenletek helyett érvényesek

Hogy a bolygó pályákat & a fényelhajlást tudjuk tárgyalni,
 a geodetikákat kell vizsgálni a (*) metrikában.

Egy hasznos trükk (HF)

(9)

$$S = \int ds g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \rightarrow \ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0$$

(E.L.-egy) ahol $(\dot{}) = \frac{d}{ds}()$

Azaz használhatjuk ezt az egyszerűbb hatást a geodetikus levezetésére, feltéve, hogy használjuk a $g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 1$ helyett is

$$1) L = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \dot{\varphi}^2)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{t}}\right)' - \frac{\partial L}{\partial t} = \left(2\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \dot{t}\right)' = 0 \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right)' - \frac{\partial L}{\partial r} = \left(-2\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \dot{r}\right)' - \frac{2GM}{r} \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-2} \dot{r}^2 + 2r(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \dot{\varphi}^2) - \frac{2GM}{r^2} \dot{t}^2 = 0 \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)' - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \left(-2r^2 \dot{\theta}\right)' + 2r^2 \sin\theta \cos\theta \dot{\varphi}^2 = 0 \quad (3)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right)' - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \left(-2r^2 \sin^2\theta \dot{\varphi}\right)' = 0 \quad (4)$$

$$(3) \Rightarrow \ddot{\theta} + 2 \frac{\dot{r}}{r} \dot{\theta} - \sin\theta \cos\theta \dot{\varphi}^2 = 0$$

ha úgy választjuk meg a koord. r.-t, hogy kezdettől

$\theta = \pi/2$ és $\dot{\theta} = 0$ akkor úgy is marad/válaszolhatunk ezt!)

→ ahogy Newtoni mechanikában is, úgy a mozgás egy síkban fog történni

(1,4) ⇒ két megmaradó mennyiség (már beírtam, hogy $\sin\theta=1$ $\cos\theta=0$)

$$\boxed{J = m r^2 \dot{\varphi}^2} = \text{const.} \quad \boxed{E = m \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \dot{t}^2} = \text{const.}$$

$$L = \frac{ds^2}{dt^2} = 1 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\varphi}^2$$

(10)

↓ kerjük $\dot{t}$ -t, E -t és kifejezzük $\dot{r}^2$ -et

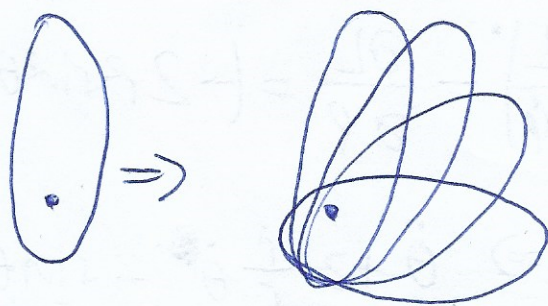
$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 = \left[\frac{E}{2m} - \frac{1}{2} m \right] + \frac{GMm}{r} - \frac{\gamma^2}{2mr^2} + \frac{GM\gamma^2}{mr^3}$$

ez egy 1D-s mozgás az alábbi eff. pot.-ban:

$$V_{\text{eff}}(r) = - \underbrace{\frac{GMm}{r}}_{\text{Newtoni pot.}} + \underbrace{\frac{\gamma^2}{2mr^2}}_{\text{centrifug.}} - \underbrace{\frac{GM\gamma^2}{mr^3}}_{\text{új tag}} \left(\frac{1}{c^2} \right)^{\text{vizualizáció (dim. anal.)}}$$

ez a két tag van már Newtoni mechanikában is
 $\rightarrow$ ellipszis pályára lenne (a hőfok pályára)

↗
 módosítja az ellipszis pályát



analitikus pert. számítás / numerikus számolás

$\Rightarrow$ Merkúr adatai esetén $5 \cdot 10^{-7}$ radian perihéliumel fordulás

Megjegyzés: ez kisebb korrekció, mint ami a többi pályára Newtoni mechanikából jön, de kell hogy pontos legyen az adatok leírása (már Einstein is megemlíti)

Geodetikus egyenlet közvetlenül az ekvivalenciából

(11)

$m > 0 \Rightarrow$ létező inerciarendszer (y) ahol egy pontban

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dy^\mu dy^\nu$$

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+ - - -)$$

$$\frac{d^2 y^\mu}{ds^2} = 0$$

másik koord. r.(x): $0 = \frac{d^2 y^\mu}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{ds} \right)$

$$0 = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \frac{\partial^2 y^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} \quad \bigg/ \quad \frac{\partial x^\sigma}{\partial y^\mu}$$

$$0 = \underbrace{\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\sigma}{\partial y^\mu}}_{=\delta_\alpha^\sigma} \frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 y^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\partial x^\sigma}{\partial y^\mu}}_{\equiv \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds}$$

$\equiv \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma$ (ez látjuk a

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0}$$

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dy^\mu dy^\nu = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\beta} dx^\alpha dx^\beta = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

$$\boxed{g_{\alpha\beta} = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\beta} \eta_{\mu\nu}}$$

$m=0$ Nem lehet s -el parametrizálni, mert az
ívhasznellem $ds=0$ végig

(12)

Valami más paramétert kell használni: σ
(Lehet pl. $\sigma = y^0$)

Locális inerciarendszer $\frac{d^2 y^M}{d\sigma^2} = 0$ az a levezetés

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{d^2 x^\alpha}{d\sigma^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dy^\beta}{d\sigma} \frac{dy^\gamma}{d\sigma} &= 0 \\ g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Metrika kompatibilitás ekvivalenciából

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma} &= \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left(\frac{\partial y^M}{\partial x^\alpha} \frac{\partial y^N}{\partial x^\beta} \eta_{MN} \right) = \frac{\partial^2 y^M}{\partial x^\alpha \partial x^\sigma} \frac{\partial y^N}{\partial x^\beta} \eta_{MN} + \frac{\partial y^M}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 y^N}{\partial x^\beta \partial x^\sigma} \eta_{MN} \\ &= \frac{\partial^2 y^M}{\partial x^\alpha \partial x^\sigma} \frac{\partial y^N}{\partial x^\beta} \delta^P_M \eta_{PN} + \frac{\partial^2 y^N}{\partial x^\beta \partial x^\sigma} \frac{\partial y^M}{\partial x^\alpha} \delta^P_N \eta_{MP} \\ &= \frac{\partial^2 y^M}{\partial x^\alpha \partial x^\sigma} \left[\frac{\partial y^N}{\partial x^\beta} \frac{\partial y^P}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\delta}{\partial y^M} \eta_{PN} \right] + \frac{\partial^2 y^N}{\partial x^\beta \partial x^\sigma} \left[\frac{\partial y^M}{\partial x^\alpha} \frac{\partial y^P}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\delta}{\partial y^N} \eta_{MP} \right] \\ &= \Gamma^\delta_{\alpha\sigma} g_{\delta\beta} + \Gamma^\delta_{\beta\sigma} g_{\alpha\delta} \\ \Rightarrow \partial_\sigma g_{\alpha\beta} - \Gamma^\delta_{\alpha\sigma} g_{\delta\beta} - \Gamma^\delta_{\beta\sigma} g_{\alpha\delta} &= 0 \quad \square \end{aligned}$$

Fényelhajlás $\Theta \rightarrow$ egy síkban történik a mozgás ($\theta = \frac{\pi}{2}$)

$$\varphi \rightarrow j = r^2 \dot{\varphi} = \text{konst.} \quad (\dot{}) \equiv \frac{d}{d\sigma}()$$

$$t \rightarrow E = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \dot{t} = \text{konst.}$$

$$L = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\varphi}^2 \stackrel{\text{fény}}{=} 0$$

$$\dot{r}^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^2 \dot{t}^2 - r^2 \dot{\varphi}^2 \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)$$

$$\dot{r}^2 = E^2 - j^2/r^2 + 2GMj^2/r^3$$

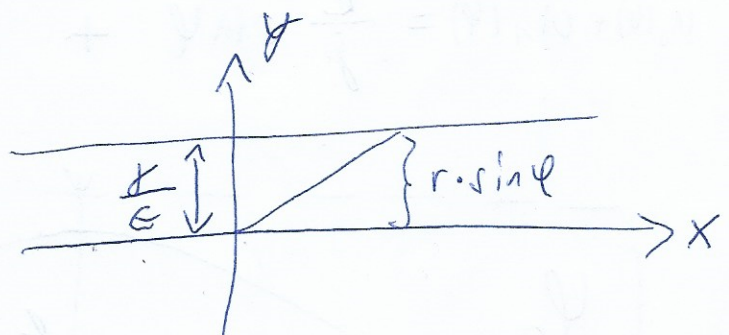
$$u = 1/r \quad \dot{u} = -\dot{r}/r^2$$

$$\left[\frac{du}{d\varphi} \right]^2 = \frac{\dot{u}^2}{\dot{\varphi}^2} = \frac{\dot{r}^2}{r^4 \dot{\varphi}^2} = \frac{\dot{r}^2}{j^2} = \frac{E^2}{j^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{2GM}{r^3} = \frac{E^2}{j^2} - u^2 + 2GMu^3$$

perturbálatlan egyenlet:

$$(u_0'(\varphi))^2 + u_0(\varphi) = E^2/j^2$$

$$u_0 = \frac{E}{j} \sin \varphi \quad \text{megoldja}$$



legyen

$$u_0 + u_1$$

$$u_1 \sim O(\epsilon)$$

$$2GM \sim O(\epsilon)$$

$O(\epsilon)$ rendű tagok:

$$2u_0 u_1' + 2u_0 u_1 = 2GM u_0^3$$

$$\cos \varphi u_1'(\varphi) + \sin \varphi u_1(\varphi) = \frac{GM\epsilon^2}{j^2} \sin^3 \varphi = K \sin^3 \varphi$$

homogén: $\cos \varphi u_1' + \sin \varphi u_1 = 0$

$u_1 = A \cos \varphi$ megoldja

inhomogén: $u_1(\varphi) = A(\varphi) \cos \varphi \Rightarrow A'(\varphi) \cos^2 \varphi = K \sin^3 \varphi$

$$\int d\varphi \frac{\sin^3 \varphi}{\cos^2 \varphi} = \int d\varphi \sin \varphi \tan^2 \varphi \xrightarrow{u = \cos \varphi} - \int du \frac{1-u^2}{u^2} = \int du \left(1 - \frac{1}{u^2}\right) = u + 1/u = \cos \varphi + 1/\cos \varphi$$

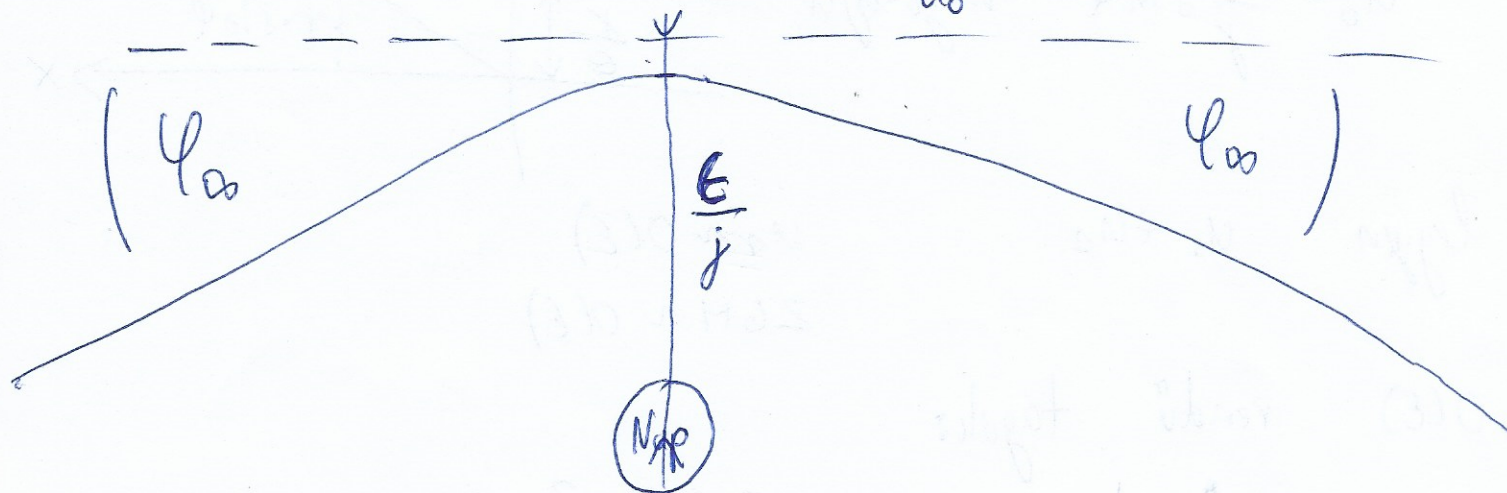
$du = -\sin \varphi d\varphi$

inhomogén mego.: $K(1 + \cos^2 \varphi) = K\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\varphi)\right) = \frac{3}{2} K \left[1 + \frac{1}{3} \cos(2\varphi)\right]$

dét. mego.: $u_1(\varphi) = \cancel{A \cos \varphi} + \frac{3GM\epsilon^2}{2j^2} \left[1 + \frac{1}{3} \cos(2\varphi)\right]$
legyen 0

$$u_0(\varphi) + u_1(\varphi) = \frac{\epsilon}{j} \sin \varphi + \frac{3GM\epsilon^2}{2j^2} \left[1 + \frac{1}{3} \cos(2\varphi)\right]$$

u_0



$$\varphi_\infty \ll 1 \Rightarrow \frac{\epsilon}{j} \varphi_\infty + \frac{3GM\epsilon^2}{2j^2} \left(1 + \frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi_\infty = -\frac{2GM\epsilon}{j}}$$

A teljes elhagyás $2|\varphi_{\infty}| = \frac{4GM}{j} \approx \frac{4GM}{R_{\min}} \left(\frac{1}{c^2} \right)$ (15)

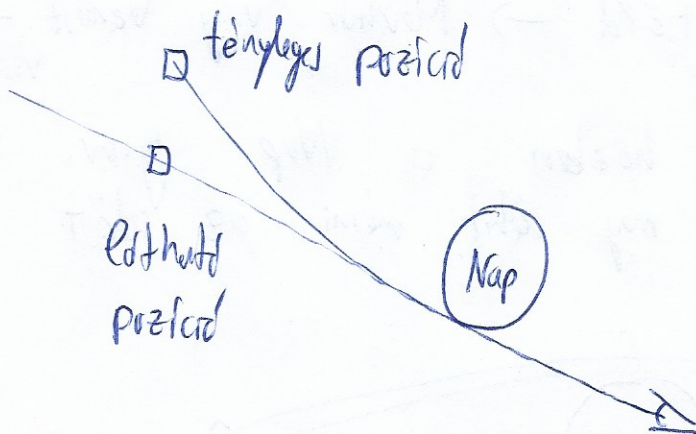
$M = M_{\text{Nap}} \quad R_{\min} = R_{\text{Nap}} \Rightarrow |2|\varphi_{\infty}| \approx 1.75'|$

Eddington kísérlet 1919

teljes napfogyatkozás

$\leadsto$ háttérben lévő csillagok láthatóak
legyenek (túlfényes a nap)

a Nap ismert helyen lévő csillagok dőlt volt



$\Rightarrow$ meg lehet mérni
a görbét ✓

Shapiro delay (időkéés)

(16)

Irwin Shapiro

60-as évek

toróbb meggy: nem csak a fény pályáját, hanem a
haladásának idejét is tervezeli

$$\frac{dt}{dr} = \frac{dt/d\sigma}{dr/d\sigma} = \frac{\cancel{E}}{1 - \frac{2GM}{r}} \frac{1}{\sqrt{E^2 - j^2/r^2 + 2GMj^2/r^3}}$$

$$\text{idő: } \int dt = \int \frac{E}{1 - \frac{2GM}{r}} \frac{dr}{\sqrt{E^2 - j^2/r^2 + 2GMj^2/r^3}}$$

ötlet: rádiójel

Föld → Merkúr vagy Vénusz → Föld
visszatérően

közben a Nap grav. terében meggy
meg lehet mérni az időt

