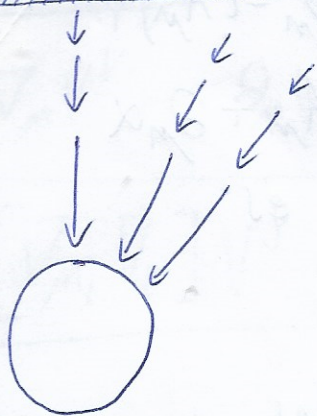


Görbület és gravitáció

①

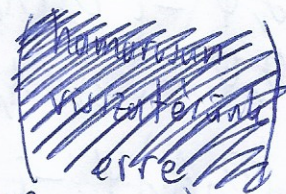


Ekvivalenciaelv: $\forall$ grav. mezőben $\forall$ térítő pt.-ban
 $\exists$ lokális inerciarendszer: ahol a mozgás egy. alakja
 olyan, mint egy nem gyorsuló koord. r.-ben grav.
 erők nélkül, a térítő pont kis környezetében
 $\Rightarrow$ általános koord. trafokat vizsgáltuk

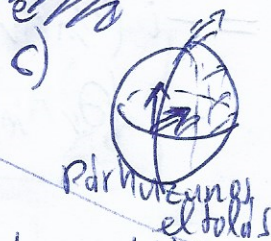
$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$$

1. Kérdés: honnan tudom, hogy egy $g_{\mu\nu}(x)$ gravitációs terektől,
 vagy valami furcsa koord. választástól nem triv?

Válasz: a) grav. mezőben vannak drapályerők (geometikus deriváció)



2. Kérdés: b) létezik olyan koord. r. ahol $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ globálisan?
 mi a grav. mezők dinamikája?



Elektrodinamika: térerősség, mint kovariáns deriváltak kommutátora

Dirac: $\mathcal{L}_D = \int d^4x \bar{\Psi}(x) [i \not{\partial} \partial_m - m] \Psi(x)$

globális szimmetria: $\Psi \rightarrow e^{i\alpha} \Psi$ $\bar{\Psi} \rightarrow e^{-i\alpha} \bar{\Psi}$

tegyük lokális (mértékszimmetria) $\Psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} \Psi(x)$

$$\bar{\Psi}(x) \rightarrow e^{-i\alpha(x)} \bar{\Psi}(x)$$

$m \bar{\Psi} \Psi$ invariáns ✓

$\bar{\Psi} i \not{\partial} \partial_m \Psi$ nem az, mert $\partial_m (e^{i\alpha} \Psi) = \underbrace{e^{i\alpha} \partial_m \Psi}_{\text{ez ok lenne}} + \underbrace{i (\partial_m \alpha) e^{i\alpha} \Psi}_{\text{ez nem ok}}$

bevezetünk egy kovariáns deriváltat $D_\mu \psi := (\partial_\mu - i A_\mu) \psi$

ha az új mező trafo szabálya $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha$
akkor az A_μ trafoja hígíti a ψ tagot és

$$D_\mu \psi \rightarrow e^{i\alpha(x)} D_\mu \psi \quad (*)$$

és $\bar{\psi} i \gamma^\mu D_\mu \psi$ már mértékinvarián

Az egyszerű (*) trafo szabály "óra" hogy ellenesben a ~~norma~~ ∂_μ -vel, a D_μ -k nem kommutálnak

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu] \psi &= (D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu) \psi = (\partial_\mu - i A_\mu)(\partial_\nu - i A_\nu) \psi - (\partial_\nu - i A_\nu)(\partial_\mu - i A_\mu) \psi \\ &= \cancel{\partial_\mu \partial_\nu \psi} - i \partial_\mu (A_\nu \psi) - i A_\mu \partial_\nu \psi - \cancel{A_\mu A_\nu \psi} \\ &\quad - \cancel{\partial_\nu \partial_\mu \psi} + i \partial_\nu (A_\mu \psi) + i A_\nu \partial_\mu \psi + \cancel{A_\nu A_\mu \psi} \\ &= -i (\partial_\mu A_\nu) \psi - \cancel{i A_\nu \partial_\mu \psi} - \cancel{i A_\mu \partial_\nu \psi} \\ &\quad + i (\partial_\nu A_\mu) \psi + \cancel{i A_\mu \partial_\nu \psi} + \cancel{i A_\nu \partial_\mu \psi} = -i (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \psi \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{F_{\mu\nu} \text{ térerősség}} \end{aligned}$$

helyezzünk $F_{\mu\nu}$ -ből egy skalárt: $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_{EM} = (\text{konst.}) \times F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

Ezzel analóg konstrukciót akarunk most csinálni
a gravitáció esetén. ~~az~~

Gravitáció: előző dra (dlt. koordin. tr.) kovariáns derivált ③

$$\nabla_\mu V^\nu := \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\sigma} V^\sigma \Rightarrow \nabla_\mu V^\nu = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} \nabla'_\rho V'^\sigma$$

$$(\#) \boxed{[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\rho = (\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) V^\rho := R^\rho_{\sigma\mu\nu} V^\sigma} \quad \begin{array}{l} \text{Riemann-tenzor /} \\ \text{Riemann-Christoffel} \\ \text{görbületi tenzor} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \nabla_\nu V^\rho &= \partial_\mu \nabla_\nu V^\rho + \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \nabla_\nu V^\sigma - \Gamma^\kappa_{\mu\nu} \nabla_\kappa V^\rho \\ &= \partial_\mu (\partial_\nu V^\rho + \Gamma^\rho_{\nu\sigma} V^\sigma) + \Gamma^\rho_{\mu\sigma} (\partial_\nu V^\sigma + \Gamma^\sigma_{\nu\kappa} V^\kappa) - \Gamma^\kappa_{\mu\nu} (\partial_\kappa V^\rho + \Gamma^\rho_{\kappa\lambda} V^\lambda) \\ &= \underline{\partial_\mu \partial_\nu V^\rho} + (\partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma}) V^\sigma + \Gamma^\rho_{\nu\sigma} \partial_\mu V^\sigma + \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \partial_\nu V^\sigma + \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma_{\nu\kappa} V^\kappa \\ &\quad - \Gamma^\kappa_{\mu\nu} \partial_\kappa V^\rho - \Gamma^\kappa_{\mu\nu} \Gamma^\rho_{\kappa\lambda} V^\lambda \end{aligned}$$

alkalmazott: $\mu\nu$ -ben szimmetrikus

$$\Rightarrow \boxed{R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}}$$

HF: Biz. ki, h. ez egy tenzor: 1) (#) bal oldala 3-indexes tenzor
→ jobb oldala

2) segédlet: $R^\rho_{\sigma\mu\nu} V^\sigma$ 3-indexes tenzor $\forall V^\sigma$ -ra

$\Rightarrow R^\rho_{\sigma\mu\nu}$ 4-indexes tenzor

TULAJDONSÁGOK (HF) $R^\rho_{\sigma\mu\nu} = -R^\rho_{\sigma\nu\mu}$

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} + R^\rho_{\nu\sigma\mu} + R^\rho_{\mu\nu\sigma} = 0$$

$$g_{\mu\beta} R^\beta_{\nu\rho\sigma} = R_{\mu\nu\rho\sigma} \Rightarrow R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\mu\rho\sigma\nu}$$

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\sigma\rho\nu\mu}$$

256 elemből csak 20 független

Bianchi-azonosság: $\nabla_\alpha R_{\beta\gamma\mu\nu} + \nabla_\beta R_{\alpha\gamma\mu\nu} + \nabla_\gamma R_{\alpha\beta\mu\nu} = 0$

also indexes

vektorok
tenzorok:

retrika kompatibilitás

(7)

$$\begin{aligned} \boxed{[\nabla_M, \nabla_N] V_P} &= [\nabla_M, \nabla_N] g_{P\sigma} V^\sigma \stackrel{\text{retrika kompatibilitás}}{=} g_{P\sigma} [\nabla_M, \nabla_N] V^\sigma \\ &= g_{P\sigma} R^\sigma_{ \mu \nu} V^\mu = R^\sigma_{ \mu \nu} V^\mu = R^\sigma_{ \mu \nu} V^\sigma \\ &= R_{\lambda \mu \nu} \delta^\lambda_\sigma V^\sigma = R_{\lambda \mu \nu} g^{\lambda \kappa} g_{\kappa \sigma} V^\sigma = \boxed{R^\kappa_{ \mu \nu} V_\kappa} \\ &= \boxed{-R^\lambda_{ \mu \nu} V_\lambda} \end{aligned}$$

deltalinas tenzor: vektorok összegeként felírható

$$\begin{aligned} [\nabla_M, \nabla_N] (A_P B_\sigma) &= \nabla_M ([\nabla_N A_P] B_\sigma + A_P [\nabla_N B_\sigma]) - (V \leftrightarrow M) \\ &= (\nabla_M \nabla_N A_P) B_\sigma + (\nabla_N A_P) (\nabla_M B_\sigma) + (\nabla_M A_P) (\nabla_N B_\sigma) + A_P (\nabla_M \nabla_N B_\sigma) \\ &\quad - (V \leftrightarrow M) \end{aligned}$$

$$= ([\nabla_M \nabla_N] A_P) B_\sigma + A_P ([\nabla_M \nabla_N] B_\sigma)$$

$$= R^\kappa_{ \mu \nu} A_\kappa B_\sigma + A_P R^\kappa_{ \mu \nu} B_\sigma$$

$$[\nabla_M, \nabla_N] T_{P\sigma} = -R^\kappa_{ \mu \nu} T_{\kappa\sigma} - R^\kappa_{ \sigma \mu \nu} T_{P\kappa}$$

hasonlóan

$$\begin{aligned} [\nabla_M, \nabla_N] T^{\alpha \beta \dots}_{ \rho \sigma \dots} &= R^\alpha_{ \lambda \mu \nu} T^{\lambda \beta \dots}_{ \rho \sigma \dots} \\ &\quad + R^\beta_{ \lambda \mu \nu} T^{\alpha \lambda \dots}_{ \rho \sigma \dots} + \dots \\ &\quad - R^\alpha_{ \rho \mu \nu} T^{\alpha \beta \dots}_{ \lambda \sigma \dots} \\ &\quad - R^\alpha_{ \sigma \mu \nu} T^{\alpha \beta \dots}_{ \rho \lambda \dots} - \dots \end{aligned}$$

Lapos téridő $\exists$ koord. rendszer, ahol $ds^2 = dt^2 - d\vec{x}^2$ ⑤

téridő lapol $\Rightarrow$ triv. $R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = 0$

Állítás: $R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = 0 \Rightarrow$ téridő lapol $\left(\begin{array}{l} \text{egy} \\ \text{tartományban} \end{array} \right)$

Ricci-tenzor

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu} \Rightarrow R_{\rho\sigma}{}^{\mu}{}_{\mu} = 0$$

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu} \Rightarrow R^{\rho}{}_{\rho\mu\nu} = 0$$

$$\boxed{R^{\rho}{}_{\mu\nu\rho} = R_{\mu\nu}}$$

Ricci-tenzor

$$R^{\rho}{}_{\mu\nu\rho} = g^{\rho\sigma} R_{\sigma\mu\nu\rho} = -g^{\rho\sigma} R_{\sigma\mu\rho\nu} = -R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu} = -R_{\mu\nu}$$

$$R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu} = g^{\rho\sigma} R_{\sigma\mu\rho\nu} = g^{\rho\sigma} R_{\sigma\mu\nu\rho} = R^{\rho}{}_{\mu\nu\rho} = R_{\mu\nu}$$

$$R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu} = g^{\rho\sigma} R_{\sigma\mu\rho\nu} = -g^{\rho\sigma} R_{\sigma\mu\nu\rho} = -R^{\rho}{}_{\mu\nu\rho} = -R_{\mu\nu}$$

$$\boxed{g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^{\nu}{}_{\nu} = R}$$

Ricci-skalar

v. skalar görbület

Einstein-Hilbert-hatás

$$\mathcal{I}' = \mathcal{I}'_{\text{grav}} + \mathcal{I}'_{\text{anyag}}$$

$$\mathcal{I}'_{\text{grav}} = \int d^4x \sqrt{-g'} R \frac{-1}{2\kappa}$$

$$\mathcal{I}'_{\text{anyag}} = \int d^4x \sqrt{-g'} \mathcal{L}_{\text{anyag}}$$

$$\delta \mathcal{I}' = \int \left[\frac{-1}{2\kappa} \frac{\delta(\sqrt{-g'} R)}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta(\sqrt{-g'} \mathcal{L}_{\text{anyag}})}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x$$

$$= \int \left[\frac{-1}{2\kappa} \left(\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{R}{\sqrt{-g'}} \frac{\delta \sqrt{-g'}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) + \frac{1}{\sqrt{-g'}} \frac{\delta(\sqrt{-g'} \mathcal{L}_{\text{anyag}})}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \sqrt{-g'} \delta g^{\mu\nu} d^4x$$



$$\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{R}{\sqrt{-g'}} \frac{\delta \sqrt{-g'}}{\delta g^{\mu\nu}} = \kappa \frac{+2}{\sqrt{-g'}} \frac{\delta(\sqrt{-g'} \mathcal{L}_{\text{anyag}})}{\delta g^{\mu\nu}}$$

A determináns variációja

$$\delta g = \delta \det g_{\mu\nu} \stackrel{\uparrow}{=} g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$$

$$\ln \det M = \text{tr} \log M$$

$$\frac{(\det M)'}{\det M} = \text{tr}(M^{-1} M')$$

$$(\det M)' = \det M \text{tr}(M^{-1} M')$$

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta g = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \stackrel{\uparrow}{=} -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$$

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho \Rightarrow \delta g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = -g^{\mu\nu} \delta g_{\nu\rho}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu}$$

Ricci-skalár variációja

dőlítés: ez nem kell

$$\delta R = \delta(g^{\sigma\nu} R_{\sigma\nu}) = R_{\sigma\nu} \delta g^{\sigma\nu} + g^{\sigma\nu} \delta R_{\sigma\nu}$$

$$R_{\mu\nu} + \left(-\frac{1}{2} g_{\mu\nu}\right) R = \kappa \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{anyag}})}{\delta g^{\mu\nu}}$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu}$$

Ricci-tenzor variációja

$$\delta R_{\sigma\nu} = ?$$

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \pi^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \pi^\rho_{\mu\sigma} + \pi^\rho_{\mu\lambda} \pi^\lambda_{\nu\sigma} - \pi^\rho_{\nu\lambda} \pi^\lambda_{\mu\sigma}$$

$$\delta R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \delta \pi^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \delta \pi^\rho_{\mu\sigma} + \delta \pi^\rho_{\mu\lambda} \pi^\lambda_{\nu\sigma} + \pi^\rho_{\mu\lambda} \delta \pi^\lambda_{\nu\sigma} - \delta \pi^\rho_{\nu\lambda} \pi^\lambda_{\mu\sigma} - \pi^\rho_{\nu\lambda} \delta \pi^\lambda_{\mu\sigma}$$

nontriviális különbsége: (7)

$$T_{(A)}^{\mu}{}_{\nu\lambda} = T_{(A)}^{\mu\sigma} \frac{\partial x^{\lambda\sigma}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\nu\kappa}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial^2 x^{\lambda\sigma}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}}$$

$$T_{(B)}^{\mu}{}_{\nu\lambda} = T_{(B)}^{\mu\sigma} \frac{\partial x^{\lambda\sigma}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\nu\kappa}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial^2 x^{\lambda\sigma}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}}$$

$$\Rightarrow T_{(A)}^{\mu}{}_{\nu\lambda} - T_{(B)}^{\mu}{}_{\nu\lambda} \quad \text{het komexid különbsége egy tenzor (kiesik az extra tag)}$$

$$\Rightarrow \delta T^{\rho}{}_{\nu\sigma} \text{ egy tenzor, tehát lehet venni a kovariáns deriváltját}$$

$$\nabla_{\mu} \delta T^{\rho}{}_{\nu\sigma} = \partial_{\mu} \delta T^{\rho}{}_{\nu\sigma} + T^{\rho}{}_{\mu\lambda} \delta T^{\lambda}{}_{\nu\sigma} - T^{\lambda}{}_{\mu\nu} \delta T^{\rho}{}_{\lambda\sigma} - T^{\lambda}{}_{\mu\sigma} \delta T^{\rho}{}_{\nu\lambda}$$

$$\nabla_{\nu} \delta T^{\rho}{}_{\mu\sigma} = (\text{előző csak } \mu \leftrightarrow \nu)$$

$\uparrow$ $\mu\nu$ -ben szimmetrikus.

$$\nabla_{\mu} \delta T^{\rho}{}_{\nu\sigma} - \nabla_{\nu} \delta T^{\rho}{}_{\mu\sigma} = \partial_{\mu} \delta T^{\rho}{}_{\nu\sigma} - \partial_{\nu} \delta T^{\rho}{}_{\mu\sigma}$$

$$+ T^{\rho}{}_{\nu\lambda} \delta T^{\lambda}{}_{\mu\sigma} - T^{\lambda}{}_{\nu\sigma} \delta T^{\rho}{}_{\mu\lambda}$$

$$+ T^{\rho}{}_{\mu\lambda} \delta T^{\lambda}{}_{\nu\sigma} - T^{\lambda}{}_{\mu\sigma} \delta T^{\rho}{}_{\nu\lambda}$$

$$= \delta R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}$$

$$\Rightarrow \delta R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \nabla_{\mu} \delta T^{\rho}{}_{\nu\sigma} - \nabla_{\nu} \delta T^{\rho}{}_{\mu\sigma} \Rightarrow \delta R_{\sigma\nu} = \delta R^{\rho}{}_{\sigma\rho\nu}$$

$$\delta R_{\sigma\nu} = \nabla_{\rho} \delta T^{\rho}{}_{\nu\sigma} - \nabla_{\nu} \delta T^{\rho}{}_{\rho\sigma}$$

Palatini azonosság

nem ad tagot, mert $\int d^4x \sqrt{g} \nabla_{\mu}(\text{tenzor}) = 0$

ez nulla kontribúciót ad, mert

$$\int d^4x \sqrt{-g} \nabla_m A^m = \int d^4x \nabla_m (\sqrt{-g} A^m) = 0$$

haszonból
haszonból, itt:

$$\int d^4x \sqrt{-g} \nabla_m T^{\mu\nu}{}_{;\mu\nu} = 0 \quad \text{stb.}$$

$$\begin{aligned} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\sigma\nu} \delta R_{\sigma\nu} &= \int d^4x \sqrt{-g} g^{\sigma\nu} (\nabla_\rho \delta T^\rho{}_{\nu\sigma} - \nabla_\nu \delta T^\rho{}_{\rho\sigma}) \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} [\nabla_\rho (g^{\sigma\nu} \delta T^\rho{}_{\nu\sigma}) - \nabla_\sigma (g^{\sigma\nu} \delta T^\rho{}_{\rho\sigma})] \\ &= \int d^4x \partial_\rho [\sqrt{-g} g^{\sigma\nu} \delta T^\rho{}_{\nu\sigma}] - \int d^4x \partial_\sigma (\sqrt{-g} g^{\sigma\nu} \delta T^\rho{}_{\rho\sigma}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad \begin{array}{l} \text{energia-impulzus} \\ \text{tenzor} \end{array}$$

Einstein-tenzor.

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta (\sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{angaz}})}{\delta g^{\mu\nu}} = 2 \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{angaz}}}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu} \mathcal{L}_{\text{angaz}}$$

pl. $\mathcal{L}_{\text{angaz}} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi)(\partial_\nu \phi) - \frac{m^2}{2} \phi^2$

$$T_{\mu\nu} = (\partial_\mu \phi)(\partial_\nu \phi) - g_{\mu\nu} \mathcal{L}_{\text{angaz}}$$

(ami korábban volt, csak $\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}$)

$$R_{mv} = R_{vm} \Rightarrow \boxed{T_{mv} = T_{vm}} (*)$$

Bianchi $\nabla_\alpha R_{\beta\gamma\mu\nu} + \nabla_\beta R_{\alpha\gamma\mu\nu} + \nabla_\gamma R_{\alpha\beta\mu\nu} = 0$

$$\Rightarrow \nabla^\mu R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \nabla_\nu R \Rightarrow \nabla^\mu (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0} (**)$$

(*) és (**) konzisztencia-feltétel

$$K = \frac{8\pi G}{c^4} \quad \swarrow \text{nemrelativisztikus
limitből
(fővő ága)}$$

ÖSSZEFOGLALÁS

$$S = \frac{-c^4}{16\pi G} \int \sqrt{-g} R d^4x + S_{\text{anyag}}$$

$$S_{\text{anyag}} = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{anyag}}$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{anyag}})}{\delta g^{\mu\nu}}$$

vagy $T_{\mu\nu}^{\text{perf. foly.}} = (\rho + p) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}$

mint a 6. előadás
csak $\eta^{\mu\nu} \rightarrow g^{\mu\nu}$