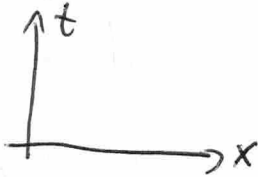


1. előadás A fénysebesség állandósága, ívhossz, Lorentz-transzformációk

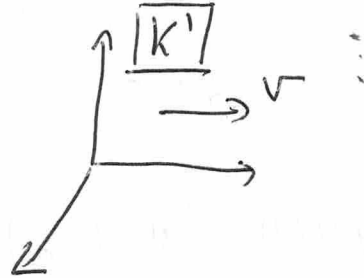
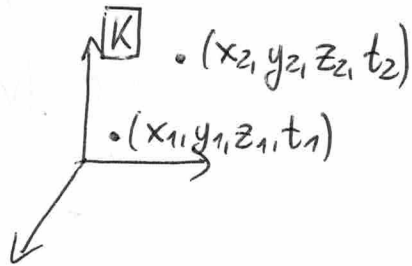
Relativitás elve: A fizika törvényei minden koord. rsz.-ben azonosak:  
 a különböző rsz.-ekben érvényes koord.-kal felírt egyenletek alakja azonos kísérlet  $\Rightarrow$  a fény sebessége (vákuumban) minden koord. rsz.-ben azonos  
 $\Rightarrow$  speciális relativitáselmélet

Téridő  $(x, y, z, t)$  pontjai események

1+1D:



ívhossz



Fénnyel  $(x_1, y_1, z_1, t_1)$ -ből  $(x_2, y_2, z_2, t_2)$ -be  $K$  rendszerben

megtett út  $s = c(t_2 - t_1) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

$$\Rightarrow c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = 0$$

mivel  $K'$ -ben is  $c$  a sebesség

$$c^2(t_2' - t_1')^2 - (x_2' - x_1')^2 - (y_2' - y_1')^2 - (z_2' - z_1')^2 = 0$$

ívhossz  $s_{12} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}$

fénysebesség állandósága miatt ha egy  $K$  rendszerben  $s_{12} = 0$   
 akkor  $s_{12}' = 0$  minden más  $K'$  rendszerben

közeli eseményekre:

ívelem négyzet

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (*)$$

3+1D Minkowski-geometria:  $(x, y, z, t)$  pontok  $(*)$  ívelem négyzetével (állandóság)

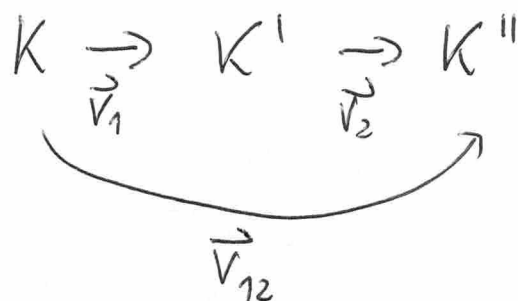
2) Mi a kapcsolat  $ds^2$  és  $ds'^2$  között?

Ha az egyik 0 akkor a másik is, azonos rendűek

$$ds' = a ds$$

Mitől függhet  $a$ ?  $x, y, z, t$ -től nem (homogén tér)   
  $v$ -től? ismételten nem (izotrop)   
  $\rightarrow a(|\vec{v}|)$

Tehátunk 3 koordinátát:



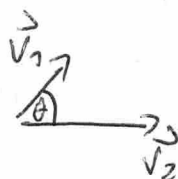
$$ds' = a(|\vec{v}_1|) ds$$

$$ds'' = a(|\vec{v}_2|) ds'$$

$$ds'' = a(|\vec{v}_{12}|) ds$$

$$a(|\vec{v}_1|) a(|\vec{v}_2|) = a(|\vec{v}_{12}|)$$

↑ nem csak  $|\vec{v}_1|$  és  $|\vec{v}_2|$ -től függ, hanem a közöttük lévő szögtől is  $\angle$



$$\Rightarrow a = \text{const.}$$

$$a^2 = a \Rightarrow a = 1$$

$$\boxed{ds = ds'}$$

Speciális Irhosszak Legyen  $(x_1, y_1, z_1, t_1)$  és  $(x_2, y_2, z_2, t_2)$  két esemény  $K$ -ban

a) Létezik-e olyan  $K'$  amelyben a két esemény azonos helyen történik?

$$t_{12} = t_2 - t_1 \quad \ell_{12}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - \ell_{12}^2 = s_{12}'^2 = c^2 t_{12}'^2 - \ell_{12}'^2$$

$$l_{12}^2 = 0 \Rightarrow s_{12}^2 = s_{12}^{12} = c^2 t_{12}^2 > 0$$

Akkor, ha  $s^2 > 0$  időszerű

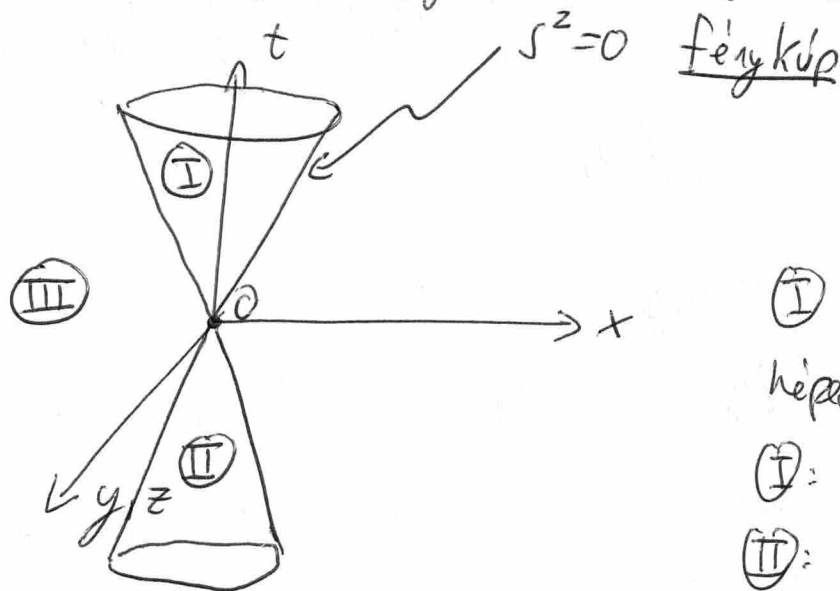
b) Létezik-e olyan  $K'$  melyben a két es. azonos időben történik?

$$t_{12}^1 = 0 \Rightarrow s_{12}^{12} = -l_{12}^{12} < 0$$

Akkor, ha  $s^2 < 0$  térszerű

$s^2 = 0$  fényszerű

tér-idő tartományban egy  $O$  eseményhez képest



I és II  $O$ -hoz képest időszerű

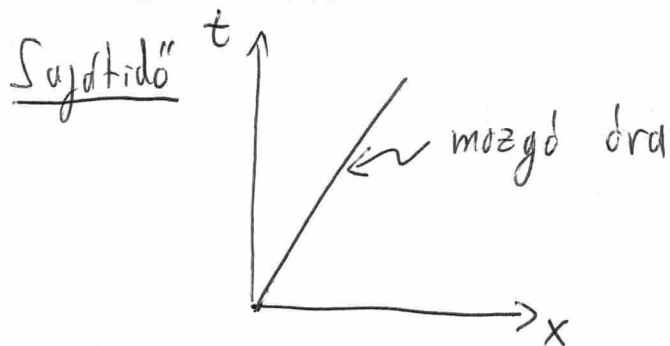
I: abszolút jövő

II: absz. múlt

III  $O$ -hoz képest

térszerűen szeparált

(semmilyen kölcsönhatás nem juthat el ide)



$dt' = ?$  mennyi idő telik el az órának együtt mozgó  $K'$ -ben?

$$K: ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

$$K': ds'^2 = c^2 dt'^2$$

$$ds^2 = ds'^2$$

$$\Rightarrow dt' = dt \sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2}}$$

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = v^2$$

$$\Rightarrow dt' = dt \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

$$\boxed{t'_2 - t'_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

A mozgó óra  $t_2$  kevesebbet mér.

$$\underbrace{t'_2 - t'_1} = \frac{1}{c} \int_{t_1}^{t_2} ds$$

$$\boxed{\text{sajátidő} = \frac{1}{c} \text{ út hossz}}$$

$\Delta T = T_2 - T_1 \leftarrow$  szinkronos jelölés

(anti) háromszög egyenlőtlenség

$O_1, O_2, O_3$  3 esemény,  $s_{12}, s_{13}, s_{23}$  időscerű,  $t_1 < t_2 < t_3$



$\exists$  olyan  $K$ , ahol  $O_1$  és  $O_3$  egy helyen van

$$\Rightarrow T_{13} = \int ds_{13} = t_3 - t_1 \text{ ebben a } K\text{-ban}$$

ugyanítt:

$$T_{12} + T_{23} = \int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{\sqrt{1 - \frac{v_{12}^2}{c^2}}}_{< 1} + \int_{t_2}^{t_3} dt \underbrace{\sqrt{1 - \frac{v_{23}^2}{c^2}}}_{< 1}$$

$$< \int_{t_1}^{t_3} dt = t_3 - t_1 = T_{13}$$

$$\boxed{T_{13} > T_{12} + T_{23}}$$

a "legkisebb út" az egyenes

## Lorentz-transzformáció

(5)

Mi a kapcsolat a  $K$  és  $K'$  beli koord. között?

$$\text{Galilei-tr.: } x = x' + vt' \quad y = y' \quad z = z' \quad t = t'$$

Sérti a fénysebesség állandóságot / írhaasz állandóságot

Olyan általános lineáris transzformációt keresünk, ami megtartja az írhaaszt.

- $t$  koordinátával nem csinál semmit: 3D eltolás, tárhözékek, forgatás
- időeltolás ( $\Delta t$  változatlan,  $x$ -el nem csinál semmit)  
időtárhözés
- mi a forgatás megfelelője  $x, y, z$  síkban?

Nézzük az  $xt$  esetet:

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}$$

$$(ct)^2 - x^2 = (ct')^2 - x'^2 \Rightarrow (\alpha ct' + \beta x')^2 - (\gamma ct' + \delta x')^2 = (ct')^2 - x'^2$$

$$(\alpha^2 c^2 - \gamma^2 c^2) t'^2 + 2c(\alpha\beta - \gamma\delta) t'x' - (\delta^2 - \beta^2) x'^2 = (ct')^2 - x'^2$$

$$\alpha^2 - \gamma^2 = 1$$

$$\alpha\beta = \gamma\delta$$

$$\delta^2 - \beta^2 = 1$$

$$\alpha = \pm \cosh \chi = \pm \cosh \chi / \gamma = \sinh \chi = \sinh \chi \quad +: \text{ nincs időtárh.}$$

$$\delta = \pm \cosh \chi' = \pm \cosh \chi' / \beta = \sinh \chi' = \sinh \chi' \quad +: \text{ nincs tértárh.}$$

$$\sinh \chi \cosh \chi' = \sinh \chi' \cosh \chi \Rightarrow \tanh \chi = \tanh \chi' = \chi = \chi'$$

Lorentz-boost

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \chi & \sinh \chi \\ \sinh \chi & \cosh \chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} \quad \chi: \text{rapidity}$$

Nézzük meg  $K$ -ban  $K'$  origójának mozgását ( $x'=0$ )

$$\left. \begin{aligned} ct &= ct' \cosh \chi \\ x &= ct' \sinh \chi \end{aligned} \right\} \quad \frac{x}{ct} = \tanh \chi = \frac{v}{c}$$

$\frac{x}{t}$  éppen  $K'$  sebessége  
a  $K$ -ból nézve

$$\Rightarrow \sinh \chi = \frac{\tanh \chi}{\sqrt{1 - \tanh^2 \chi}} = \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\cosh \chi = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \chi}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

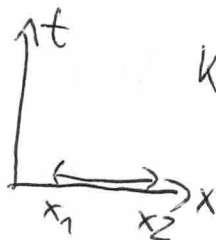
$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$x = \frac{vt' + x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

( inverzió!  
 $v \rightarrow -v$  )

Egyszerű alkalmazások

1) Lorentz-kontrakció



$K$ -ban nyugalomban van  
Milyen hosszú  $K'$ -ben?

$\Delta x = x_2 - x_1$  hosszú rúd.

$$x_1 = \frac{vt' + x_1'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad x_2 = \frac{vt' + x_2'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = \frac{x_2' - x_1'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\boxed{\Delta x' = \Delta x \sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

a mozgó rendszerben rövidebb a rúd

2) szinkronizáció újra

2 esemény:  
 $(x_1, t_1)$   
 $(x_2, t_2)$

$$t_1 = (t_1' + \frac{v}{c^2} x_1') / \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

$$t_2 = (t_2' + \frac{v}{c^2} x_2') / \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

$K'$  együtt mozog:  $x_2' = x_1' \Rightarrow t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

3) sebesség összeadása 1+1D-ben

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \chi_1 & \sinh \chi_1 \\ \sinh \chi_1 & \cosh \chi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \chi_2 & \sinh \chi_2 \\ \sinh \chi_2 & \cosh \chi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \chi_1 \cosh \chi_2 + \sinh \chi_1 \sinh \chi_2 & \cosh \chi_1 \sinh \chi_2 + \sinh \chi_1 \cosh \chi_2 \\ \sinh \chi_1 \cosh \chi_2 + \cosh \chi_1 \sinh \chi_2 & \sinh \chi_1 \sinh \chi_2 + \cosh \chi_1 \cosh \chi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\chi_1 + \chi_2) & \sinh(\chi_1 + \chi_2) \\ \sinh(\chi_1 + \chi_2) & \cosh(\chi_1 + \chi_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \end{pmatrix}}$$

rapiditás additív, de csak 1+1D-ben, tehát olyan nincs, hogy  ~~$\vec{\chi}_1 + \vec{\chi}_2$~~

$$\frac{v}{c} = \tanh(\chi_1 + \chi_2) = \frac{\cosh \chi_1 \sinh \chi_2 + \sinh \chi_1 \cosh \chi_2}{\cosh \chi_1 \cosh \chi_2 + \sinh \chi_1 \sinh \chi_2} = \frac{\tanh \chi_1 + \tanh \chi_2}{1 + \tanh \chi_1 \tanh \chi_2}$$

$$\boxed{v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}}$$

Sebességek transzformációja általában

$K, K'$  x tengely mentén  $V$  sebességgel

mozogjon egy részecske  $v_x = \frac{dx}{dt}$  sebességgel  $K$ -ban

$$v_x' = \frac{dx'}{dt'} \text{ -vel } K' \text{-ben}$$

$$dx = \frac{V dt' + dx'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad dy = dy' \quad dz = dz' \quad dt = \frac{dt' + (V/c^2) dx'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

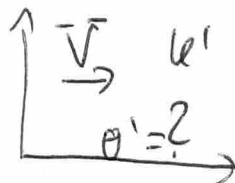
$$\Rightarrow v_x = \frac{v_x' + V}{1 + \frac{v_x' V}{c^2}} \quad v_y = \frac{v_y' \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + \frac{v_x' V}{c^2}} \quad v_z = \frac{v_z' \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + \frac{v_x' V}{c^2}}$$

- a merőleges sebességek is változnak
- nem szimmetrikus  $v_x, V$ -ben (Lorentz-transzformáció nem felcserélhető)

Sebességek irányvonalak transzformációja

Legyen  $\vec{v}$  az  $xy$  síkban:

$$v_x = v \cos \theta \quad v_y = v \sin \theta \quad v_z = 0$$



$$\frac{v_y}{v_x} = \tan \theta = \frac{v_y' \sqrt{1 - V^2/c^2}}{v_x' + V} = \frac{v' \sqrt{1 - V^2/c^2} \sin \theta'}{v' \cos \theta' + V}$$



Legyen

$$v' = c \quad (\text{fényjel})$$

9

$$\Rightarrow \tan \theta = \frac{\sin \theta' \sqrt{1 - v^2/c^2}}{\cos \theta' + v/c}$$

$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + (v/c) \cos \theta'} \sin \theta'$$

$$\cos \theta = \frac{\cos \theta' + v/c}{1 + (v/c) \cos \theta'}$$

$v/c \ll 1$  elsőrendű sorfejtés  $\sin \theta$ -ban:

$$\sin \theta = \sin \theta' (1 - v/c \cos \theta')$$

$$\sin \theta - \sin \theta' = - \frac{v}{c} \sin \theta' \cos \theta' \quad :$$

$$\Delta \theta = \theta' - \theta \Rightarrow \sin \theta' - \sin \theta = \cos \theta' \Delta \theta + O(\Delta \theta)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \theta = \frac{v}{c} \sin \theta'}$$

Fényaberráció

(csillagvizatban: a távcső mozgása miatt máshol látszik a csillag)

NYUGALMI RENDSZER



MOZGÓ RENDSZER

(~~a~~ megfigyelt sebességének irányában látszik arrelly)

