Fázisátalakulások evolúciós potenciáljátékokban

Bolyai Kollégium Fizika Szakszeminárium

Király Balázs
Témavezető: Dr. Szabó György
(MTA) EK MFA

ELTE, 2019. október 22.

Tartalomjegyzék

1. Mivel foglalkozik a játékelmélet?

Néhány lehetséges megfogalmazás:

→ „A játékelmélet többszereplős döntési helyzetekkel foglalkozik, melyekben a szereplők a nyereségüket igyekeznek maximalizálni." (Simonovits András)

→ „Game theory provides the tools that allow us to predict outcomes in settings of strategic interaction." (Matthew Hoelle)

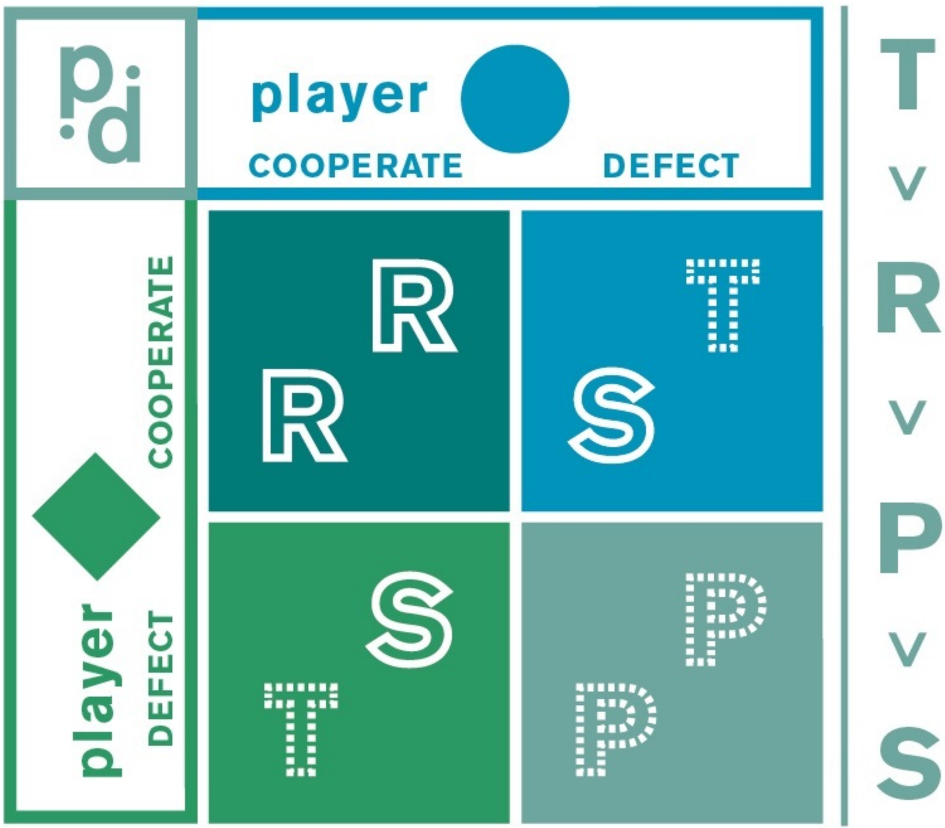
→ „[A] játékokban megtalálhatók a különféle konfliktusok főbb elemei..."
(J. D. Williams, Sztrókay Kálmán fordításában)

→ „[G]ame theory is a universal language for the unification of the behavioral sciences." (Herbert Gintis)

→ „A játékelmélet célja megérteni a kölcsönhatások természetét, következményeit, és magyarázatot találni az élővilág jelenségeire, evolúciós kialakulására."
(Szabó György)

→ „Understand the world. Respond to the world. Change the world."
(Steve Schecter, Herbert Gintis)

A leggyakrabban bemutatott példa a fogolydilemma:



eredeti ábra: Chris Jensen és Greg Riestenberg

Ez a játék

- → nem kooperatív
- → statikus
- → normál alakú
- → mátrixjáték
- → szimmetrikus
- → társadalmi dilemma

A társadalmi dilemma feloldásának egyik lehetősége:

→ A valóságban a játék sokszereplős és többször ismételve játsszák.

→ Vagyis valójában bővebb stratégiahalmazból válogathatnak a játékosok.

→ Közhiedelem (folk theorem): remélhető, hogy az ismételt játékban a kölcsönös együttműködés is „racionális”.

Robert Axelrod versenye 1979-ben:

→ N számú versenyző játszik ismeretlen számú körmérkőzést.

→ Az eredményt egy közbülső véges szakaszban elért eredmény alapján hirdetik ki.

→ Néhány lehetséges stratégia:

- ⋆ Feltétel nélkül együttműködő
- ⋆ Megátalkodott potyautas
- ⋆ Véletlen
- ⋆ Kölcsönkenyér visszajár (TFT)
- ⋆ Nyertes csapaton ne változtass
- ⋆ Sztochasztikus reaktív stratégiák

→ A verseny nyertese a TFT volt.

→ A kis lépések politikája kedvez az együttműködésnek.

2. Mi köze ehhez az evolúciónak?

A valódi játékosok általában nem képesek megfelelni a „klasszikus” játékelmélet axiomatikus követelményeinek:

$\rightarrow$ A játékkal kapcsolatos összes információ nem mindig elérhető.

$\rightarrow$ A játékosok nem mindig képesek „racionális” döntések meghozatalára.

$\rightarrow$ A sikeres stratégiát valamilyen próba szerencse alapon keresik.

Szintén a dinamika fontosságára világít rá a játékelmélet evulócióra való alkalmazása:

$\rightarrow$ A játékosok sikerességének mértéke a darwini rátermettség (fitness).

$\rightarrow$ Ha az i-edik versengő típus gyakorisága a teljes populációban ρ_i, valamint ezen típus relatív rátermettségét f_i jelöli (súlyozott átlaguk $\overline{f}$), akkor

$$\rho_i(t+\Delta t) = \frac{f_i}{\overline{f}}\rho_i(t) \iff \dot{\rho}_i(t) = \left(f_i - \overline{f}\right)\rho_i$$

$\rightarrow$ A rátermettségeket egy játék nyereményeivel azonosíthatjuk: $f_i = (\mathbf{A}\rho)_i$.

3. Milyen játék és dinamika vezet el a statisztikus fizikához?

Tekintsük az úgynevezett logit stratégiafrissítési szabályt:

$$w(\mathbf{s}_x \to \mathbf{s}'_x, \mathbf{s}_{-x}) = \frac{\mathrm{e}^{u_x(\mathbf{s}'_x, \mathbf{s}_{-x})/K}}{\sum\limits_{\mathbf{s}''_x} \mathrm{e}^{u_x(\mathbf{s}''_x, \mathbf{s}_{-x})/K}} = \frac{1}{\sum\limits_{\mathbf{s}''_x} \mathrm{e}^{\left[u_x(\mathbf{s}''_x, \mathbf{s}_{-x}) - u_x(\mathbf{s}'_x, \mathbf{s}_{-x})\right]/K}}$$

$\to$ Alacsony zajszint, azaz $K \to 0$ esetén valamelyik legjobb választ adja:

$$w(\mathbf{s}_x \to \mathbf{s}'_x, \mathbf{s}_{-x}) \xrightarrow[K\to 0]{} \begin{cases} \frac{1}{|\mathrm{BR}(\mathbf{s}_{-x})|}, & \text{ha } \mathbf{s}'_x \in \mathrm{BR}(\mathbf{s}_{-x}) \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

$$\mathrm{BR}(\mathbf{s}_{-x}) = \left\{ \mathbf{s}'_x \mid u_x(\mathbf{s}'_x, \mathbf{s}_{-x}) = \max_{\mathbf{s}''_x} u_x(\mathbf{s}''_x, \mathbf{s}_{-x}) \right\}$$

$\to$ Magas zajszint, azaz $K \to \infty$ esetén viszont a relatív rátermettségtől függ:

$$w(\mathbf{s}_x \to \mathbf{s}'_x, \mathbf{s}_{-x}) \xrightarrow[K\to \infty]{} \frac{1}{n}\left[1 + \frac{u_x(\mathbf{s}'_x, \mathbf{s}_{-x}) - \overline{u}_x(\mathbf{s}_{-x})}{K}\right]$$

→ A logitszabály a rendszer bármely két állapota között megenged átmenetet.

→ Létezik egyértelmű stacionárius megoldása a vonatkozó mesteregyenletnek.

→ Ez ráadásul tetszőleges kezdeti eloszlás esetén határeloszlás.

→ Ha teljesül a részletes egyensúly:

$$p(\mathbf{s})w(\mathbf{s} \to \mathbf{s}') = p(\mathbf{s}')w(\mathbf{s}' \to \mathbf{s})$$

$$\frac{p(\mathbf{s}_x, \mathbf{s}_{-x})}{p(\mathbf{s}'_x, \mathbf{s}_{-x})} = \frac{w(\mathbf{s}'_x \to \mathbf{s}_x, \mathbf{s}_{-x})}{w(\mathbf{s}_x \to \mathbf{s}'_x, \mathbf{s}_{-x})} = \mathrm{e}^{\left[u_x(\mathbf{s}_x, \mathbf{s}_{-x}) - u_x(\mathbf{s}'_x, \mathbf{s}_{-x})\right]/K}$$

→ A játék potenciáljának definíciója:

$$U(\mathbf{s}_x, \mathbf{s}_{-x}) - U(\mathbf{s}'_x, \mathbf{s}_{-x}) = u_x(\mathbf{s}_x, \mathbf{s}_{-x}) - u_x(\mathbf{s}'_x, \mathbf{s}_{-x}) \quad \forall x, \mathbf{s}_x, \mathbf{s}'_x, \mathbf{s}_{-x}$$

→ Azaz ha létezik potenciál, akkor a logitszabály a Boltzmann-eloszlásba visz:

$$p(\mathbf{s}) = \frac{1}{Z}\mathrm{e}^{U(\mathbf{s})/K}, \quad \text{ahol} \quad Z = \sum_{\mathbf{s}'} \mathrm{e}^{U(\mathbf{s}')/K}$$

4. Mikor létezik potenciál?

Egy, az előbbivel ekvivalens feltétel:

→ A stratégiaprofilok terében az egyoldalú stratégiaváltoztatásokkal bejárható zárt hurkok mentén a változtató játékosok nyereményváltozásainak összege zérus.

Mátrixjátékok esetében ez összekapcsolható a kifizetési mátrix szerkezetével:

→ A vektorok mintájára a mátrixok is kifejthetők bázis szerint.

→ Válaszható olyan bázis, amelyet négyféle elemi játék alkot:

- ⋆ n darab elemi társfüggő játék
- ⋆ n darab elemi önfüggő játék
- ⋆ $\binom{n}{2}$ darab elemi koordinációs játék
- ⋆ $\binom{n-1}{2}$ darab elemi ciklikus játék

$$\mathbf{A}^{(\mathrm{cd})}(1;n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

→ Csak akkor létezik potenciál, ha a mátrixnak nincs ciklikus komponense.

4. Mikor létezik potenciál?

Egy, az előbbivel ekvivalens feltétel:

→ A stratégiaprofilok terében az egyoldalú stratégiaváltoztatásokkal bejárható zárt hurkok mentén a változtató játékosok nyereményváltozásainak összege zérus.

Mátrixjátékok esetében ez összekapcsolható a kifizetési mátrix szerkezetével:

→ A vektorok mintájára a mátrixok is kifejthetők bázis szerint.

→ Válaszható olyan bázis, amelyet négyféle elemi játék alkot:

- ⋆ n darab elemi társfüggő játék
- ⋆ n darab elemi önfüggő játék
- ⋆ $\binom{n}{2}$ darab elemi koordinációs játék
- ⋆ $\binom{n-1}{2}$ darab elemi ciklikus játék

$$\mathbf{A}^{(\mathrm{sd})}(1;n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

→ Csak akkor létezik potenciál, ha a mátrixnak nincs ciklikus komponense.

4. Mikor létezik potenciál?

Egy, az előbbivel ekvivalens feltétel:

$\rightarrow$ A stratégiaprofilok terében az egyoldalú stratégiaváltoztatásokkal bejárható zárt hurkok mentén a változtató játékosok nyereményváltozásainak összege zérus.

Mátrixjátékok esetében ez összekapcsolható a kifizetési mátrix szerkezetével:

$\rightarrow$ A vektorok mintájára a mátrixok is kifejthetők bázis szerint.

$\rightarrow$ Válaszható olyan bázis, amelyet négyféle elemi játék alkot:

- $\star$ n darab elemi társfüggő játék
- $\star$ n darab elemi önfüggő játék
- $\star$ $\binom{n}{2}$ darab elemi koordinációs játék
- $\star$ $\binom{n-1}{2}$ darab elemi ciklikus játék

$$\mathbf{A}^{(\mathrm{co})}(1,2;n) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Csak akkor létezik potenciál, ha a mátrixnak nincs ciklikus komponense.

4. Mikor létezik potenciál?

Egy, az előbbivel ekvivalens feltétel:

$\rightarrow$ A stratégiaprofilok terében az egyoldalú stratégiaváltoztatásokkal bejárható zárt hurkok mentén a változtató játékosok nyereményváltozásainak összege zérus.

Mátrixjátékok esetében ez összekapcsolható a kifizetési mátrix szerkezetével:

$\rightarrow$ A vektorok mintájára a mátrixok is kifejthetők bázis szerint.

$\rightarrow$ Válaszható olyan bázis, amelyet négyféle elemi játék alkot:

- $\star$ n darab elemi társfüggő játék
- $\star$ n darab elemi önfüggő játék
- $\star$ $\binom{n}{2}$ darab elemi koordinációs játék
- $\star$ $\binom{n-1}{2}$ darab elemi ciklikus játék

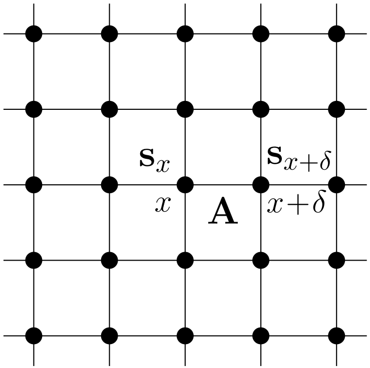
$$\mathbf{A}^{(\mathrm{cy})}(1,2,3;n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Csak akkor létezik potenciál, ha a mátrixnak nincs ciklikus komponense.

5. Az elemi koordinációs játék példája

Tekintsük az alábbi játékot:

négyzetrács



nyereménymátrix

$$\mathbf{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{n}$$

választható stratégiák

$$\mathbf{s}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

nyeremény

$$u_x(\mathbf{s}_x) = \sum_\delta \mathbf{s}_x \cdot \mathbf{A}\mathbf{s}_{x+\delta}$$

potenciál

$$U(\mathbf{s}) = \frac{1}{2} \sum_x u_x(\mathbf{s}_x)$$

logitszabály

$$w(\mathbf{s}_x \to \mathbf{s}'_x) = \frac{\mathrm{e}^{u_x(\mathbf{s}'_x)/K}}{\sum_{\mathbf{s}''_x} \mathrm{e}^{u_x(\mathbf{s}''_x)/K}}$$

állapotösszeg

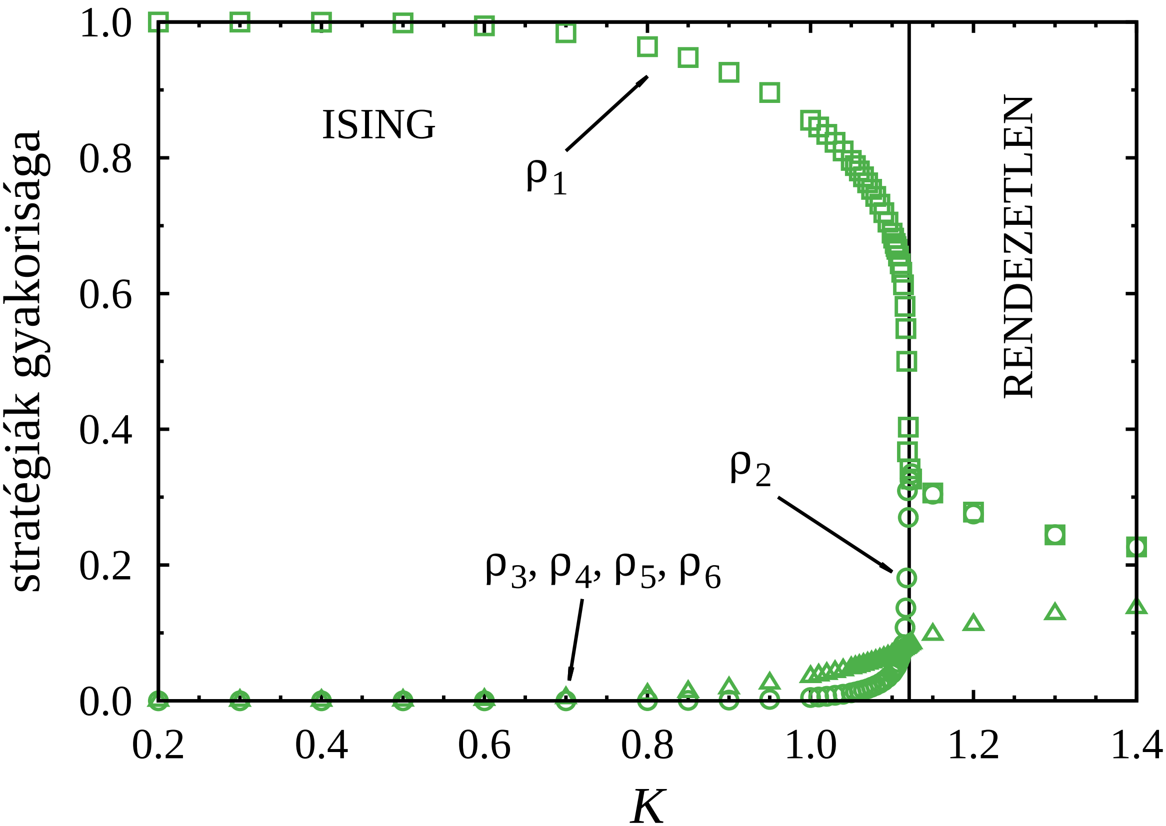
$$Z = \sum_{\mathbf{s}} \mathrm{e}^{U(\mathbf{s})/K}$$

Boltzmann-eloszlás

$$p(\mathbf{s}) = \frac{1}{Z} \mathrm{e}^{U(\mathbf{s})/K}$$

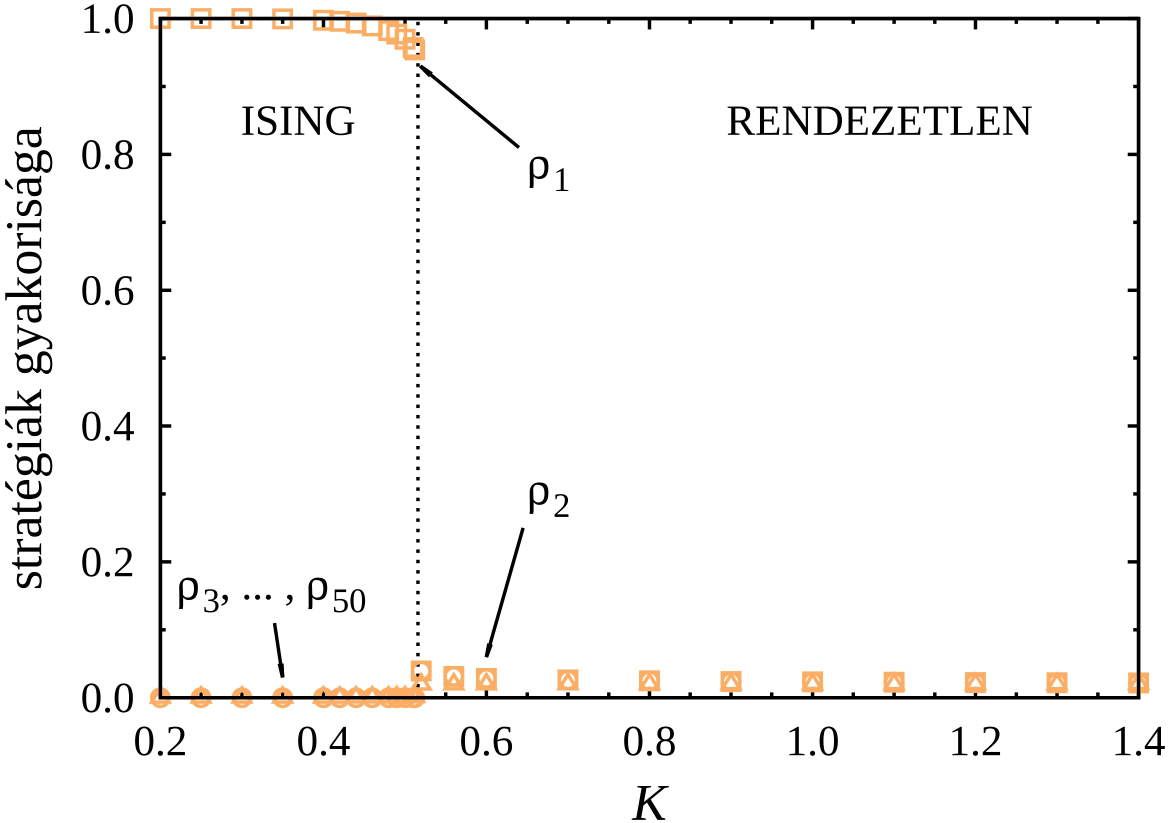
Monte-Carlo-szimulációval kapott eredmények:

$\boxed{n = 6} \qquad \leq \qquad n_{\mathrm{th}} = 27$



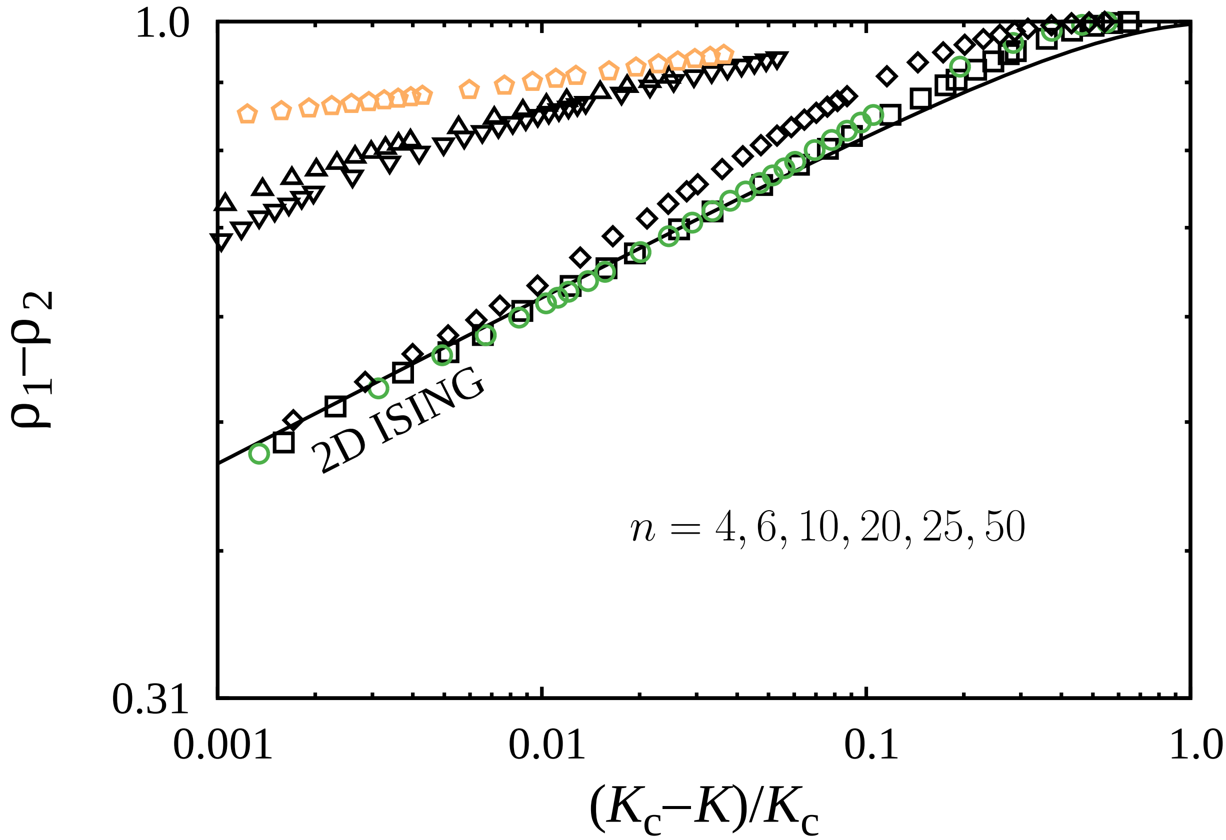
Monte-Carlo-szimulációval kapott eredmények:

$n_{\mathrm{th}} = 27 \quad < \quad \boxed{n = 50}$



Kritikus viselkedés:

$$\rho_1 - \rho_2 \propto (K_c - K)^\beta$$



Egészítsük ki az elemi koordinációs játékot egy olyan önfüggő komponenssel, ami megőrzi a koordinált stratégiák szimmetriáját:

$$\mathbf{A}'' = \begin{pmatrix} 1+h & -1+h & h & \cdots & h \\ -1+h & 1+h & h & \cdots & h \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

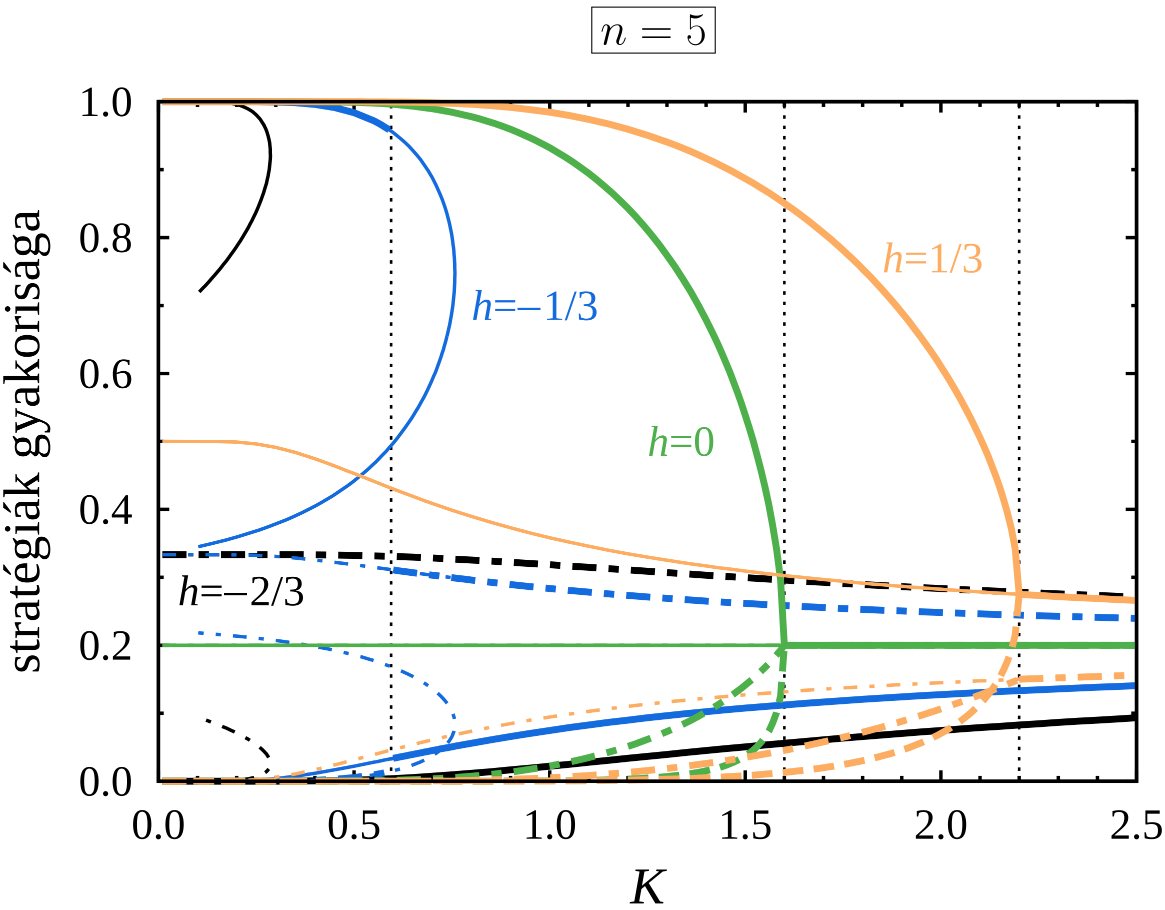
→ Ez továbbra is potenciáljáték. A potenciálmátrixa:

$$\mathbf{V}'' = \begin{pmatrix} 1+2h & -1+2h & h & \cdots & h \\ -1+2h & 1+2h & h & \cdots & h \\ h & h & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h & h & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

→ A játék potenciálja ennek segítségével:

$$U''(\mathbf{s}) = \frac{1}{2} \sum_x \sum_\delta \mathbf{s}_x \cdot \mathbf{V}'' \mathbf{s}_{x+\delta}$$

Átlagtér-közelítéssel kapott eredmények:



Az eredmények közötti hasonlóság okát az $(n-2)$ darab közömbös stratégia összevonásának segítségével érhetjük meg:

→ A logitráták z koordinációs számú reguláris rácson:

$$w(\mathbf{s}_x \to \mathbf{s}'_x) = \frac{\mathrm{e}^{[u_x(\mathbf{s}'_x, \mathbf{s}_{-x}) + zh]/K}(\delta_{1,\mathbf{s}'_x} + \delta_{2,\mathbf{s}'_x}) + (1 - \delta_{1,\mathbf{s}'_x} - \delta_{2,\mathbf{s}'_x})}{\mathrm{e}^{[u_x(1,\mathbf{s}_{-x})+zh]/K} + \mathrm{e}^{[u_x(2,\mathbf{s}_{-x})+zh]/K} + (n-2)}$$

→ A közömbös stratégiák választásának együttes rátája:

$$\sum_{\mathbf{s}_x=3}^{n} w(\mathbf{s}_x \to \mathbf{s}'_x) = \frac{n-2}{\mathrm{e}^{[u_x(1,\mathbf{s}_{-x})+zh]/K} + \mathrm{e}^{[u_x(2,\mathbf{s}_{-x})+zh]/K} + (n-2)}$$

→ Ugyanolyan alakú háromstratégiás megfelelőt keresve a konzisztencia feltétele:

$$\widetilde{w}(\tilde{\mathbf{s}}_x \to \tilde{3}) = \frac{1}{\mathrm{e}^{[u_x(1,\tilde{\mathbf{s}}_{-x})+z\tilde{h}]/K} + \mathrm{e}^{[u_x(2,\tilde{\mathbf{s}}_{-x})+z\tilde{h}]/K} + 1} = \sum_{\mathbf{s}_x=3}^{n} w(\mathbf{s}_x \to \mathbf{s}'_x)$$

$$\mathrm{e}^{z\left[h-\tilde{h}\right]/K} = n-2 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\tilde{h} = h - \frac{\ln(n-2)}{z}K}$$

Azaz a közömbös stratégiák összevonásának erejéig az $\mathbf{A}''$ játékkal ekvivalens:

$$\tilde{\mathbf{A}}''(1,2;n,h) = \begin{pmatrix} 1+\tilde{h} & -1+\tilde{h} & \tilde{h} \\ -1+\tilde{h} & 1+\tilde{h} & \tilde{h} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{h} = h - \frac{\ln(n-2)}{z} K$$

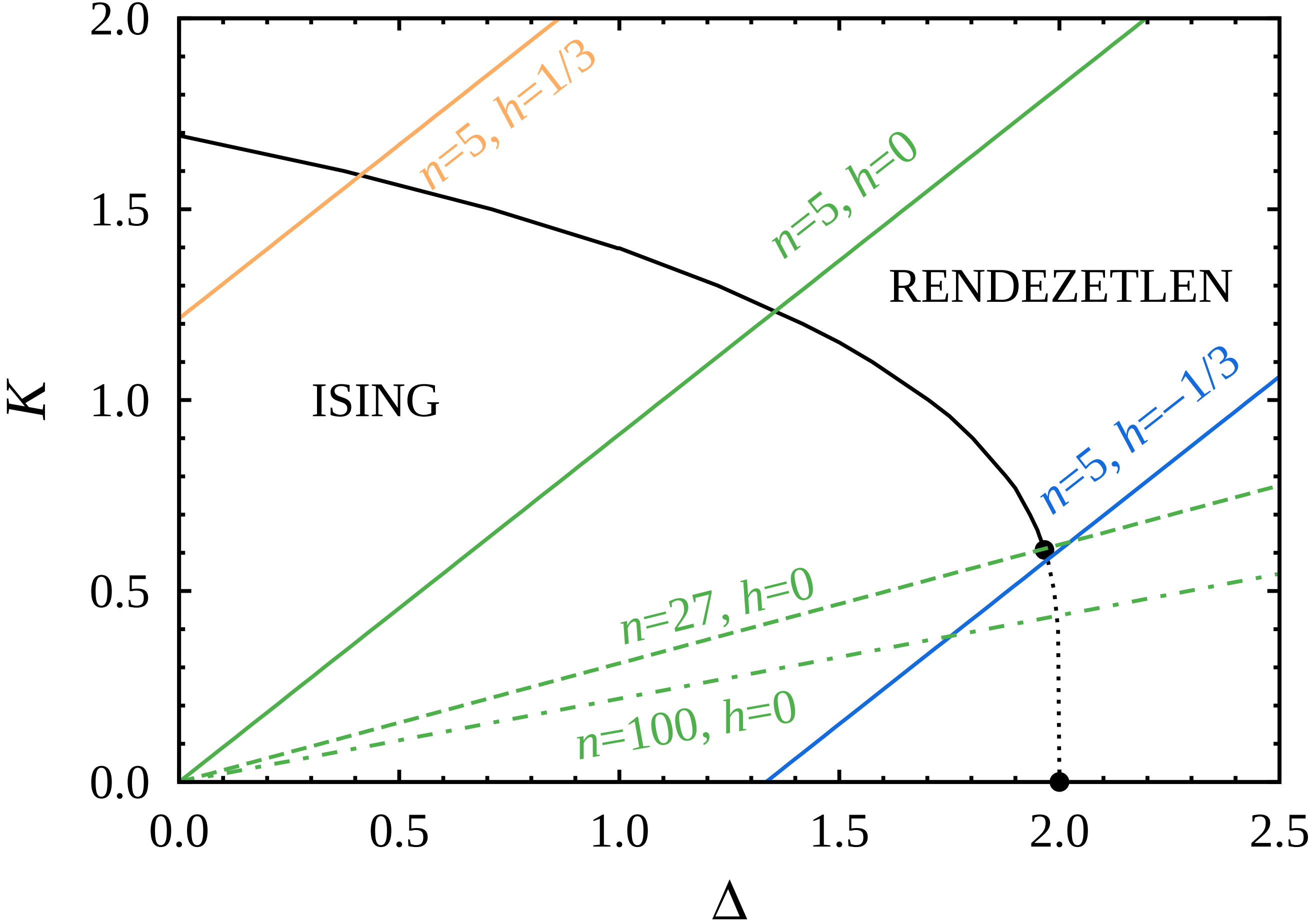
Ez viszont ráképezhető a külső tér nélküli Blume–Capel-modellre:

$$\mathcal{H} = -\sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j + \Delta \sum_i \sigma_i^2, \qquad \sigma_i = \pm 1, 0$$

$$\Delta = K \ln(n-2) - zh$$

Vagyis a statisztikus fizika Blume–Capel-modellre vonatkozó eredményeit alkalmazhatók az elemi koordinációs játékra is.

A játékmodellek elhelyezkedése a Blume–Capel-modell fázisdiagramján:



Összefoglalás

- → A logitszabály által vezérelt potenciáljátékok vizsgálata során a statisztikus fizika fogalmai és módszerei is alkalmazhatók.
- → Az elemi kooordinációs játék az Ising-modell közömbös stratégiákkal kiterjesztett változata, és egyben a Blume–Capel-modell speciális esete.
- → A közömbös stratégiák számától függően folytonos vagy első rendű fázisátalakulást is mutathat.

- → A potenciállal bíró mátrixjátékok elemi koordinációs és önfüggő játékok kombinációiként állnak elő.
- → Ez a felbontás lehetőséget nyújt a játékok – és így a klasszikus spinmodellek, valamint a bennük fellépő fázisátalakulások – szisztematikus vizsgálatára.