

9. ELŐADÁS

HIADRONSPEKTROSZKÓPIA

ALAPJAI

$$C_{ij}(\tau) = \frac{1}{Z} \text{Tr}[O_i(\tau) O_j(0) e^{-\beta H}]$$

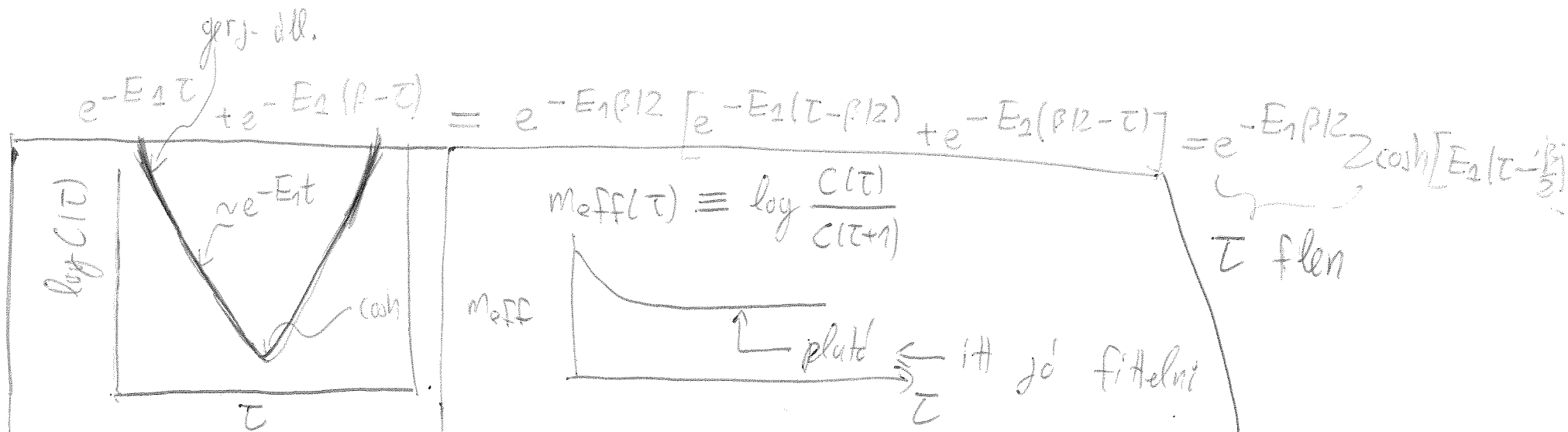
$$O_i(t) = e^{Ht} O_i e^{-Ht}$$

$$C_{ij}(\tau) = \sum_{m,n} \langle m | e^{H\tau} O_i e^{-H\tau} | n \rangle \langle n | O_j e^{-\beta H} | m \rangle / Z$$

$$= \sum_{m,n} \langle m | O_i | n \rangle \langle n | O_j | m \rangle e^{-E_m(\beta-\tau)} e^{-E_n\tau} / Z$$

$i=j$ csak a vákuum "0" és első gerj. áll "1" megtartva "tömeg" $\rightarrow$ dekv. hálóz. propagátor

$$C_{ii}(\tau) = |\langle 0 | O_i | 0 \rangle|^2 + |\langle 0 | O_i | 1 \rangle|^2 [e^{-E_1\tau} + e^{-E_1(\beta-\tau)}] + \dots$$



GERJESZTETT ÁLLAPOTOK

12

O_i $i=1, \dots, N$ különböző interpoláló operátor

$$C_{ij}(\tau) \simeq \sum_{m=1}^N \langle 0|O_i|m\rangle \langle m|O_j|0\rangle e^{-E_m\tau} = \sum_{m=1}^N g_{im} e^{-E_m\tau} g_{jm}^*$$

$$g_{jm} = \langle 0|O_j|m\rangle$$

$$C(\tau) \simeq g \begin{pmatrix} e^{-E_1\tau} & & \\ & \ddots & \\ & & \phi \\ \phi & & e^{-E_n\tau} \end{pmatrix} g^+$$

$$C(\tau) \simeq g \Lambda^\tau g^+$$

$$\Lambda = \text{diag}(e^{-E_1}, \dots, e^{-E_n})$$

$$C(\tau+1) = g \Lambda^{\tau+1} g^+$$

$$\boxed{C(\tau+1) C(\tau)^{-1} = g \Lambda^{\tau+1} g^+ (g \Lambda^\tau g^+)^{-1} = g \Lambda^{\tau+1} g^+ (g^+)^{-1} \Lambda^{-\tau} g^{-1} = g \Lambda g^{-1}}$$

az effektív tömeg általánosítása

$\Rightarrow$ tömeg a $C(\tau+1) C(\tau)^{-1}$ sajátértékei (nuk logaritmusai) nagy τ -ra

MESON INTERPOLATORS : LOKÁLIS

PSEUDOSKALAR

$$O_{\pi^+}(x) = \bar{d}(x) \gamma_5 u(x) = \bar{d}(x) \underbrace{\gamma_5}_{\substack{\text{Dirac} \\ \text{color}}} u(x)$$

$$O_{\pi^-}(x) = \bar{u}(x) \gamma_5 d(x)$$

$$O_{\pi^0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\bar{u}(x) \gamma_5 u(x) - \bar{d}(x) \gamma_5 d(x)]$$

} izospin
triplet

$$O_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\bar{u}(x) \gamma_5 u(x) + \bar{d}(x) \gamma_5 d(x)]$$

} izospin
singlet

$$O_{K^+}(x) = \bar{s}(x) \gamma_5 u(x) \quad \text{stb.}$$

VEKTOR

$$O_{\rho^+}(x)_i = \bar{d}(x) \gamma_i u(x) \quad \text{stb.}$$

$$\Rightarrow O_M(x) = \bar{\psi}^{(f_1)}(x) \Gamma \psi^{(f_2)}(x)$$

általában mezon operátor (lokális)
($\pi^0, \rho \rightarrow$ ilyenek lin. komb. -ja)

KITERJEDT FORRÁS

31

$$O_M(x_0) = \sum_{\vec{y}_1, \vec{y}_2} F(x_0; \vec{y}_1, \vec{y}_2)_{\substack{a_1 a_2 \\ a_1 a_2}} \overline{\Psi}^{(F)}(\vec{y}_1, \tau)_{\substack{a_1 \\ a_1}} \Psi^{(F')}(\vec{y}_2, \tau)_{\substack{a_2 \\ a_2}}$$

$$\text{Ha } F(x_0; \vec{y}_1, \vec{y}_2)_{\substack{a_1 a_2 \\ a_1 a_2}} = \delta(\vec{x}_0 - \vec{y}_1) \delta_{a_0 a_1} \delta_{a_0 a_1} T_{a_0 \beta_0} \delta(\vec{x}_0 - \vec{y}_2) \delta_{\beta_0 a_2} \delta_{a_0 a_2} \quad \text{LOKÁLIS}$$

$$\Rightarrow O_M(x_0) = \overline{\Psi}^{(F)}(\vec{x}_0, \tau)_{\substack{a_0 \\ a_0}} T_{a_0 \beta_0} \Psi^{(F')}(\vec{x}_0, \tau)_{\substack{\beta_0 \\ a_0}}$$

a forrás "elkenése" $\Rightarrow$ jobb átfedés az alapállapottal
 $\Rightarrow$ pontosabb tömegmeghatározás (kevésbé zavartalan ke a gerj. áll.)

VAOLY / mértékén módon kell megválasztani F -et

\ mértékét kell rögzíteni

MEZON KORRELÁTOROK (lehetséges interp. operátorokkal az egyez. helyén)

$$[\bar{\psi}(f_1) \Gamma \psi(f_2)]^+ = \overbrace{\psi(f_2)^\dagger \Gamma^\dagger (\bar{\psi}(f_1)^\dagger)^+}^{\text{Grassmann-váltás} \Leftrightarrow} = - \overline{\psi(f_2)} \gamma_4 \Gamma^\dagger \gamma_4 \psi(f_1) \xrightarrow{\text{az exp. 4. lecsengéshöz szorzás felcsatolása}} \pm \bar{\psi}(f_2) \Gamma \psi(f_1)$$

Grassmann-váltás $\Leftrightarrow$

$$\gamma_4 \Gamma^\dagger \gamma_4 = \pm \Gamma$$

$$\Rightarrow O_M(x) = \bar{\psi}(f_1) \Gamma \psi(f_2)(x)$$

$$\bar{O}_M(y) = \bar{\psi}(f_2) \Gamma \psi(f_1)(y)$$

$$\Rightarrow \langle O_M(x) \bar{O}_M(y) \rangle$$

Korrelátor

sz. jelölés	Γ	mezón
skalár σ^+	$1, \gamma_4$	$f_0, a_0, \dots$
pseudo-skalár σ^-	$\gamma_5, \gamma_4 \gamma_5$	$\pi, \eta, K, \dots$
vektor γ^-	$\gamma_i, \gamma_4 \gamma_i$	$\rho, \omega, \omega^*, \dots$
axiálvektor γ^-	$\gamma_i \gamma_5$	$a_1, f_1, \dots$
tenzor γ^-	$\gamma_i \gamma_j$	$m, b_1, \dots$

izospin triplet formális átlag

$$\langle O_T(x) \bar{O}_T(y) \rangle_F = \langle \bar{d}(x) \Gamma u(x) \bar{u}(y) \Gamma d(y) \rangle_F = T_{\alpha_1 \beta_1} T_{\alpha_2 \beta_2} \langle \bar{d}(x)_{\alpha_1} u(x)_{\beta_1} \bar{u}(y)_{\alpha_2} d(y)_{\beta_2} \rangle_F$$

$$= -T_{\alpha_1 \beta_1} T_{\alpha_2 \beta_2} \langle u(x)_{\beta_1} \bar{u}(y)_{\alpha_2} \rangle_u \langle \cancel{d(y)_{\beta_2} \bar{d}(x)_{\alpha_1}} \rangle_d$$

$$= -T_{\alpha_1 \beta_1} T_{\alpha_2 \beta_2} D_u^{-1}(x|y)_{\beta_1 \alpha_2} D_d^{-1}(y|x)_{\beta_2 \alpha_1} = -\text{tr}[\Gamma D_u^{-1}(x|y) \Gamma D_d^{-1}(y|x)]$$

isospin singlet

$$O_5(x) = \frac{1}{12} (\bar{u} \Gamma u(x) + \bar{d} \Gamma d(x))$$

5

$$\langle O_5(x) \bar{O}_5(y) \rangle_F = \frac{1}{2} \left[\langle \bar{u} \Gamma u(x) \bar{u} \Gamma u(y) \rangle_F + \langle \bar{u} \Gamma u(x) \bar{d} \Gamma d(y) \rangle_F + \langle \bar{d} \Gamma d(x) \bar{u} \Gamma u(y) \rangle_F + \langle \bar{d} \Gamma d(x) \bar{d} \Gamma d(y) \rangle_F \right]$$

$$= \Gamma_{\alpha_1 \beta_1} \Gamma_{\alpha_2 \beta_2} \frac{1}{2} \left[\underbrace{\langle u(y)_{\beta_2 c_2} \bar{u}(x)_{\alpha_1 c_1} u(x)_{\beta_1 c_1} \bar{u}(y)_{\alpha_2 c_2} \rangle_F}_{\text{Wick-tétel}} + \langle d(x)_{\beta_1 c_1} \bar{d}(x)_{\alpha_1 c_1} u(y)_{\beta_2 c_2} \bar{u}(y)_{\alpha_2 c_2} \rangle_F + u \leftrightarrow d \right]$$

$$- D_u^{-1}(y|x)_{\beta_2 c_2 \alpha_1 c_1} D_u^{-1}(x|y)_{\beta_1 c_1 \alpha_2 c_2}$$

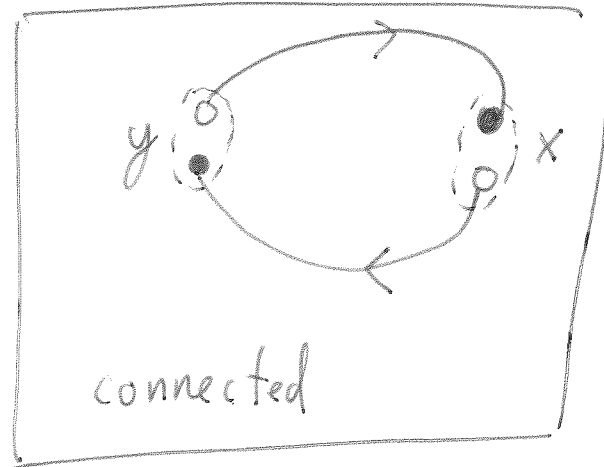
$$D_d^{-1}(x|x)_{\beta_1 c_1 \alpha_1 c_1} D_u^{-1}(y|y)_{\beta_2 c_2 \alpha_2 c_2}$$

$$+ D_u^{-1}(y|y)_{\beta_2 c_2 \alpha_2 c_2} D_u^{-1}(x|x)_{\beta_1 c_1 \alpha_1 c_1}$$

$$= -\frac{1}{2} \text{Tr} [D_u^{-1}(y|x) \Gamma] \text{Tr} [D_u^{-1}(x|y) \Gamma] + \frac{1}{2} \text{Tr} [D_u^{-1}(y|y) \Gamma] \text{Tr} [D_u^{-1}(x|x) \Gamma]$$

$$+ \frac{1}{2} \text{Tr} [D_u^{-1}(y|y) \Gamma] \text{Tr} [D_d^{-1}(x|x) \Gamma] + (u \leftrightarrow d)$$

triplet $- \text{tr} [D_a^{-2}(x|y) T D_d^{-2}(y|x) T]$



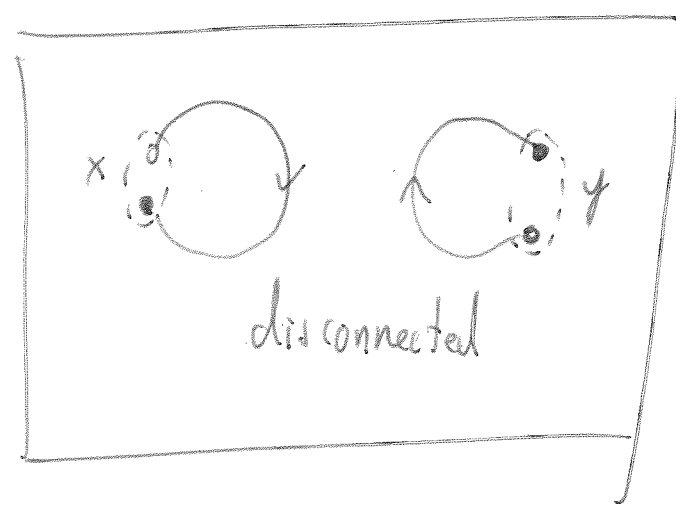
singlet $-\frac{1}{2} \text{Tr} [D_a^{-2}(y|x) T D_a^{-2}(x|y) T]$

A diagram enclosed in a rectangular box. It shows a horizontal oval loop with two vertices. The left vertex is labeled 'x' and the right vertex is labeled 'y'. Each vertex is represented by a small circle containing two dots. Arrows on the loop indicate a clockwise direction.

$+\frac{1}{2} \text{Tr} [D_a^{-2}(y|y) T] \text{Tr} [D_a^{-2}(x|x) T]$

$+\frac{1}{2} \text{Tr} [D_a^{-2}(y|y) T] \text{Tr} [D_d^{-2}(x|x) T]$

$+ u \leftrightarrow d$



$I_z = 0$ triplet

$$O_{T_1 I_z = 0} = (\bar{u} T_1 u - \bar{d} T_1 d) / \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle O_{T_1 I_z = 0}(x) \bar{O}_{T_1 I_z = 0}(y) \rangle &= -\frac{1}{2} \text{tr} [T^1 D_u^{-1}(x|y) T^1 D_u^{-1}(y|x)] \\ &\quad + \frac{1}{2} \text{tr} [T^1 D_u^{-1}(x|x)] \text{tr} [T^1 D_u^{-1}(y|y)] \\ &\quad - \frac{1}{2} \text{tr} [T^1 D_d^{-1}(x|x)] \text{tr} [T^1 D_d^{-1}(y|y)] \\ &\quad + u \leftrightarrow d \end{aligned}$$

izospin szim.: $m_u = m_d \Rightarrow D_u = D_d \Rightarrow$ nem összetaggyk
részek kiesnek

$$\tilde{O}(\vec{p}, \tau) = \frac{1}{\sqrt{V_3}} \sum_{\vec{x} \in \Lambda_3} O(\vec{x}, \tau) e^{-i \vec{x} \vec{p}}$$

→ kivetíti a $\vec{p}$ impulzust

$$\langle \tilde{O}(\vec{p}, \tau) \tilde{O}(\vec{0}, 0) \rangle = \frac{1}{\sqrt{V_3}} \sum_{\vec{x}} e^{-i \vec{x} \vec{p}} \langle O(\vec{x}, \tau) \bar{O}(\vec{0}, 0) \rangle$$

$$= A e^{-E(\vec{p})\tau} (1 + O(e^{-\tau \Delta E}))$$

$$E(\vec{p}) = \sqrt{m_H^2 + \vec{p}^2} (1 + O(q\vec{p}))$$

Nem kell az egyért propagátor (a connected together)
 $D^{-1}(y/x)_{\beta\alpha}$ propagátor source $x, \alpha, a \rightarrow$ sink y, β, b

egy osztópa $D^{-1}(y/x_0)_{\beta\alpha_0}$ = $\sum_{y\alpha a} D^{-1}(y/x)_{\beta\alpha} S_0(x_0, \alpha_0, a_0) (x)_\alpha$
 (forward propagator)
 point source $S_0(x_0, \alpha_0, a_0) (x)_\alpha = \delta(x - x_0) \delta_{\alpha\alpha_0} \delta_{aa_0}$

γ_5 hermitikus $\Leftrightarrow \gamma_5 D^{-1} \gamma_5 = (D^{-1})^\dagger \Leftrightarrow (\gamma_5)_{\alpha\alpha'} D^{-1}(x_0/y)_{\alpha'\beta'} (\gamma_5)_{\beta'\beta} = D^{-1}(y/x_0)^*_{\beta\alpha}$
 c_d

pl. π^+ prop.:

$$\langle O_T(y) \bar{O}_T(x_0) \rangle_F = -\text{tr} [D^{-1}(y/x_0) \gamma_5 D^{-1}(x_0/y) \gamma_5]$$

$$= - D^{-1}(y/x_0)_{\alpha\beta} (\gamma_5 D^{-1}(x_0/y)_{\beta\alpha})_{c_d}$$

$$= - D^{-1}(y/x_0)_{\alpha\beta} D^{-1}(y/x_0)^*_{\alpha\beta} = - \sum_{\alpha\beta} \left| D^{-1}(y/x_0)_{\alpha\beta} \right|^2$$

$\Rightarrow$ egy sparse (ritka) lin. egyenlér. megv. , $\text{dr} \propto O(\Omega)$

A disconnected rész kiszámolása lényegesen nehezebb, mert kell a
propagátor $D^{-1}(x|x) \quad \forall x$ -re $\Rightarrow O(\Omega^2)$ db

tipikus stratégia: véletlen források

$$\text{Tr}[D_u^{-1} T] \cong \frac{1}{N_{\text{vec}}} \sum_{u=1}^{N_{\text{vec}}} (\xi_u^{(k)}, D_u^{-1} T \xi_u^{(k)})$$

$$\text{ahol } \langle \xi_a, \xi_b \rangle_{\xi} = \delta_{ab}$$

hasonlóan, mint ahogy a lineáris hálózattal
a susceptibilitással tárgyaltuk előző órán

BARIONOK

$$O_B(x) = \sum_{\alpha\beta\gamma} \overset{\text{Dirac}}{\sum_{ijk}} C_{\alpha\beta\gamma ijk} \overset{\text{color}}{\sum_{abc}} \epsilon_{abc} \psi_{\alpha}^{(i)}(x) \psi_{\beta}^{(j)}(x) \psi_{\gamma}^{(k)}(x)$$

ϵ_{abc} antiszim. Lev-Civita $\Rightarrow$ mértéktény. $\epsilon_{abc} g_{aa'} g_{bb'} g_{cc'} = \overset{=1}{\det g} \epsilon_{a'b'c'}$

$$\langle O_B(x) O_B(y) \rangle = \langle M_{ijk} \psi_i(x) \psi_j(x) \psi_k(x) M_{lmn} \bar{\psi}_l(y) \bar{\psi}_m(y) \bar{\psi}_n(y) \rangle$$



csak össze fűgyő
kontrakciók

signal - to - noise: π

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{\sqrt{N_{\text{flen}}}}$$

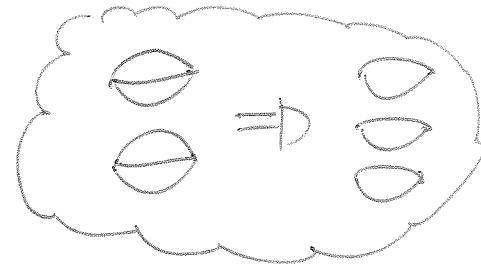
$$\sigma_0^{(\pi)} = \left[\left\langle \left(\sum_{x,y} \text{loop}(x,y) \right)^2 \right\rangle - \left\langle \sum_{x,y} \text{loop}(x,y) \right\rangle^2 \right] = \sum_{x,y} \sum_{x',y'} \left[\left\langle \text{loop}(x,y,x',y') \right\rangle - \left\langle \text{loop}(x,y) \right\rangle \left\langle \text{loop}(x',y') \right\rangle \right]$$

$$\sim e^{-2m_\pi T} \quad (T = |x_4 - y_4|)$$

$$\frac{\text{signal}}{\text{noise}} \sim \frac{e^{-m_\pi T}}{e^{-m_\pi T}} \sim T \text{ flen}$$

signal - to - noise: N

$$\sigma_0^{(N)} = \sum_{x,y} \left[\left\langle \text{loop}(x,y,x,y) \right\rangle - \left\langle \text{loop}(x,y) \right\rangle \left\langle \text{loop}(x,y) \right\rangle \right] \sim e^{-3m_\pi T}$$

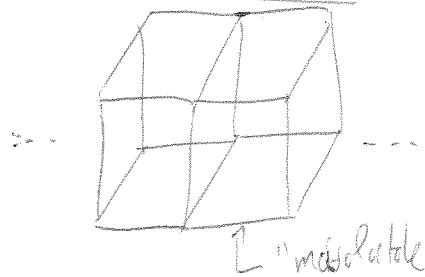


$$\frac{\text{signal}}{\text{noise}} \sim \frac{e^{-m_N T}}{e^{-\frac{3}{2}m_\pi T}} \sim e^{-(m_N - \frac{3}{2}m_\pi) T} \sim e^{-0.78m_N T}$$

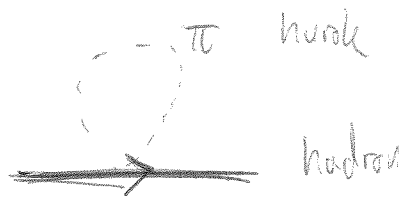
nagyon
T-val
rövid

VÉGES MÉRET EFFEKTUMOK

periodikus HF



tfh. old' irány ∞ hosszú
(elég hosszú)



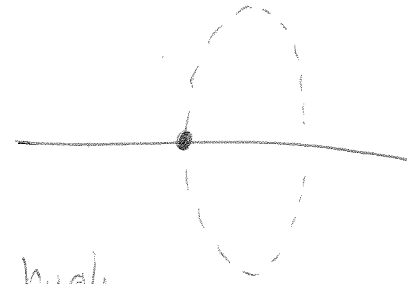
$$m_H^2 \approx m_0^2 + \alpha \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \hat{G}(p) = m_0^2 + \alpha G(0) \rightarrow \text{tömegrenormálás}$$

véges doboz $G(x) \Rightarrow \sum_{s \in \mathbb{Z}^3} G(x + Ls)$

$$\Rightarrow m_H^2(L) - m_H^2(\infty) \approx \alpha \sum_{\substack{s \neq 0 \\ s \in \mathbb{Z}^3}} G(Ls)$$

$$G(L) \sim e^{-m_\pi L}$$

$$\Rightarrow m_H^2(L) \sim m_H^2(\infty) + O(e^{-m_\pi L})$$



π körül a térszám

hadron tömeg végs méret
effektív exp. közel
 $m_\pi L$ -ben

SZÓRÁSI ÁLLAPOTOK (RUGALMAS SZÓRÁS)

14

egyszerű példa: 2 bozon 1+1D-ban

kh. -i határon kívül a hullámfr. síkhullám, de $\exists$ impulzusfüggő fázistolás $\delta(k)$

periódikus HF: $e^{ikL + 2i\delta(k)} = e^{ik0} = 1$

$\Rightarrow$ impulzus kvantálás $\ln L + 2\delta(k) = 2n\pi$

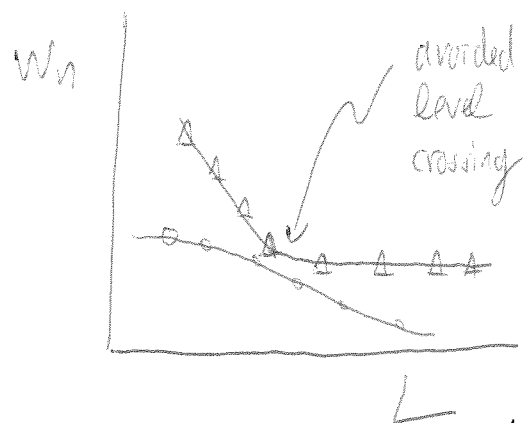
nincs kh. $\Rightarrow \delta = 0 \Rightarrow$ szabad eset $k_n = \frac{2\pi}{L} n$

ha tudom $\delta(k)$ -t $\Rightarrow k_n$

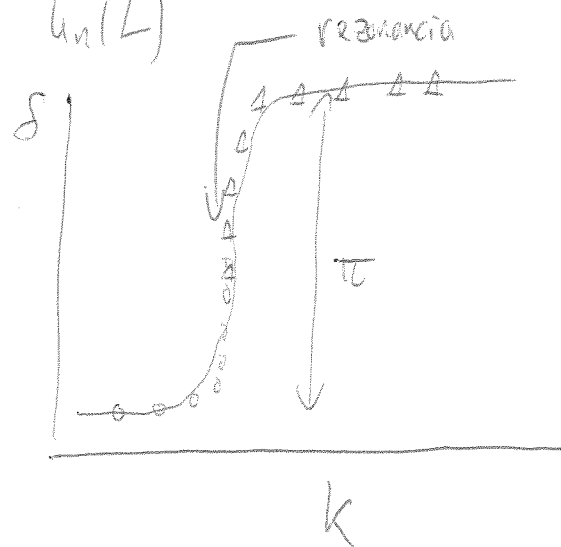
ha tudom k_n -t $\Rightarrow \delta(k_n)$ k_n -re

STRATÉGIA: 2 részecske állapotok (4 pont fo.) $\Rightarrow W_n = 2\sqrt{m^2 + k_n^2} \Rightarrow k_n$

váltakozók L -t $\Rightarrow W_n(L)$ vagy $k_n(L)$



$\Rightarrow$



Mérték konfiguráció "smitása" (smearing)

UV	fluktuációk	✓
IR	jel	
UV	zaj	↗

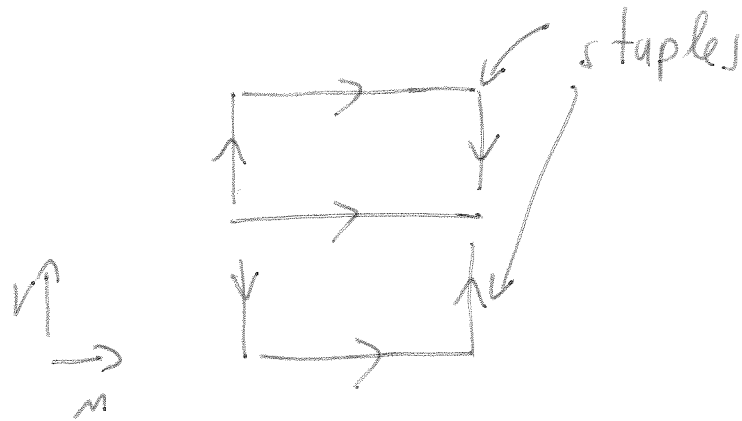
15

APE

$$① V_m(x) = (1-\alpha) U_m + \frac{\alpha}{6} \sum_{r \neq \mu} C_{mr}(x)$$

Albanese et al
1987

$$C_{mr}(x) = U_r(x) U_m(x + \hat{r}) U_r^\dagger(x + \hat{r}) + U_r(n - \hat{r})^\dagger U_m(n - \hat{r}) U_r(n - \hat{r} + \hat{r})$$



a 6 szomszédos
kuponra átlagolunk

② viszszavezetjük $su(3)$ -ba a $V_m(x)$ (*)

$$\max_{X \in su(3)} [\text{Re tr}[X V_m^\dagger]]$$

$$\Rightarrow U_m^\dagger = X$$

HYP
hypercubic

A. Hasenfratz, F. Knechtli 2001

(az eredeti linkhez hiperkubikus átlagolást utalhat)

STOUT

APE módszer

új link a régi link analitikus fr.-e

Morningstar, Peardon
2004

16

$$U'_m(x) = e^{iQ_m(x)} U_m(x)$$

$$Q_m(x) = \frac{i}{2} \left(\Omega_m(x)^+ - \Omega_m(x) \right) - \frac{1}{3} \text{tr}[\Omega_m^+ - \Omega_m]$$

$$\text{Tr} Q_m = 0 \quad Q_m^+ = Q_m$$

$$\Omega_m(x) = \left(\sum_{k \neq m} P_{mk} C_{mk}(x) \right) U_m(x)^+$$

↑
staple (APE)

tipikus választás $P_{mv} = P$
de lehet pl. csak térben
smeared: $P_{m4} = P_{4m} = 0$
 $P_{ij} = P$

HEX

HYP stant
Capitani

S. Dörr

C. Hoelbling

2006

zálog módosítás

2 alkalmas

korrelator mérés eltt simító

ehhez jobb a
stant, hex

hatai

$$[S_g[U_{ereleti}] + S_F[U_{simított}]]$$

empirikus tény:
sok cut-off effektus
csökkent