1

MÚLT ÓRA

Neuberger-operátor / OVERLAP: $D_{ov} = \frac{1}{a}\left[1 - \gamma_5 \operatorname{sign} H\right]$ $\left(\operatorname{sign} M = \frac{M}{\sqrt{M^2}}\right)$ $H = \gamma_5 A$ $A = 1 - D_W$

másik konvenció $D_{ov} = \frac{1}{a}\left[\mathbb{1} + \gamma_5 \operatorname{sign} H\right]$ $H = \gamma_5 A$ $A = \cancel{-1} + D_W$

Ginsparg – Wilson:

$$\{\gamma_5, D\} = a D \gamma_5 D$$

rácz királis szimm.

$$\delta\Psi' = i\varepsilon M \gamma_5 \left(\mathbb{1} - \tfrac{a}{2}\right) D \Psi$$

$$\delta\bar\Psi' = \bar\Psi\, i\varepsilon M \left(\mathbb{1} - \tfrac{a}{2} D\right)\gamma_5$$

$D\bar\Psi D\Psi = D\bar\Psi' D\Psi'$ $M = T^a$ $a = 1, 2, \dots, N_f^2 - 1$ $SU(N_f)_A$

$D\bar\Psi D\Psi = D\bar\Psi' D\Psi' \det\left[\mathbb{1} - 2i\varepsilon N_f Q_{top} + O(\varepsilon^2)\right]$ $U(1)_A$

$$Q_{top} = \frac{a}{2} \operatorname{Tr}[\gamma_5 D] = a^4 \sum_n q(n)$$

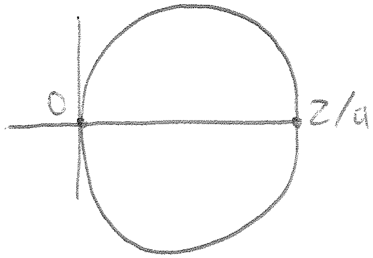
topologikus töltés

$$q(n) = \frac{1}{2a^3} \operatorname{tr}_{CD}\left[\gamma_5 D(n|n)\right]$$

első órákon bebizonyítjuk, hogy ez egy egész szám

$\Rightarrow$ WARD-ID. $\langle \partial_\mu A_\mu(x) (\dots)\rangle = 2N_f \langle q(x)(\dots)\rangle + 2\langle \bar\Psi M\gamma_5\Psi(\dots)\rangle$.

DIRAC SAJÁTVEKTOROK KIRALITÁJA



$$\lambda\,(v_\lambda, \gamma_5 v_\lambda) = (v_\lambda, \gamma_5 D v_\lambda) \overset{\gamma_5 \text{ herm.}}{=} (v_\lambda, D^\dagger \gamma_5 v_\lambda)$$

$$= (D v_\lambda, \gamma_5 v_\lambda) = \lambda^* (v_\lambda, \gamma_5 v_\lambda)$$

$$\Rightarrow (\mathrm{Im}\,\lambda)\,(v_\lambda, \gamma_5 v_\lambda) = 0$$

$(v_\lambda, \gamma_5 v_\lambda) = 0$ vagy $\lambda = \text{valós} = \begin{cases} 0 \\ 2/a \end{cases}$

$\boxed{\lambda = 0 \text{ altér}}$ $\quad D v_0 = 0 \Rightarrow \gamma_5 D v_0 = 0 \underset{GW}{\Rightarrow} -D\gamma_5 v_0 + a D\gamma_5 \underbrace{D v_0}_{=0} = 0 \Rightarrow D\gamma_5 v_0 = 0$

$\Rightarrow$ ezen az altéren D és γ_5 kommutál $\Rightarrow$ közösen diag.-ható az altéren (γ_5 s.é. ± 1)

$\boxed{\lambda = 2/a \text{ altér}}$ $\quad D v_{uv} = \frac{2}{a} v_{uv} \Rightarrow \gamma_5 D v_{uv} = \underbrace{-D\gamma_5 v_{uv} + a D\gamma_5 \underbrace{D v_{uv}}_{\frac{2}{a} v_{uv}}}_{D\gamma_5 v_{uv}} = \frac{2}{a}(\gamma_5 v_{uv})$

$\Rightarrow$ ugyanúgy közösen diag. ható

INDEX TÉTEL RÁCSON

$$Q_{top} = \frac{a}{2}\,\mathrm{tr}[\gamma_5 D] = \frac{a}{2}\sum_\lambda (v_\lambda, \gamma_5 D v_\lambda) = \frac{a}{2}\sum_\lambda \underset{\substack{0 \\ \text{ha } \lambda = 0}}{\lambda}\, \underbrace{(v_\lambda, \gamma_5 v_\lambda)}_{0 \text{ ha } \lambda \notin \mathbb{R}}$$

$$= \frac{a}{2}\,\frac{2}{a}\,(n'_+ - n'_-)$$

n'_+: pozitív kiralitású $\frac{2}{a}$ sajátvektorok száma

n'_-: negatív kiralitású $\frac{2}{a}$ s.v. száma

$\mathrm{Tr}[\gamma_5] = 0$

$$Q_{top} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}[\gamma_5 (aD - 2)] = \frac{1}{2}\sum_\lambda (v_\lambda, \gamma_5 (aD-2) v_\lambda) = -\frac{1}{2}\sum_\lambda (2 - a\lambda)\,(v_\lambda, \gamma_5 v_\lambda)$$

$$= n_- - n_+$$

n_-: negatív kir. 0 sajátért. sajátv. száma

n_+: pozitív ||

$$\boxed{Q_{top} = n_- - n_+ = n'_+ - n'_-}$$

INDEX A KONTINUUMBAN

$$n_+ - n_- = \lim_{M\to\infty} \sum_n \left(\varphi_n, \gamma_5 f\left(\frac{\lambda_n^2}{M^2}\right)\varphi_n\right) = \lim_{M\to\infty}\sum_n \left(\varphi_n, \gamma_5 f\left(\frac{\not{D}^2}{M^2}\right)\varphi_n\right)$$

$$= \lim_{M\to\infty} \mathrm{Tr}\left(\gamma_5 f\left(\frac{\not{D}^2}{M^2}\right)\right) = \int d^4x \underbrace{\lim_{M\to\infty}\sum_n \varphi_n^+(x)\gamma_5 f\left(\frac{\not{D}^2}{M^2}\right)\varphi_n(x)}_{:= a(x)}$$

$f(0)=1$

$f(x) \to 0 \quad (x\to\infty)$ (elég gyorsan)

pl. $f(x)=e^{-x}$ OK

$$\not{D}^2 = \gamma_\mu\gamma_\nu D_\mu D_\nu = \Big(\tfrac{1}{2}[\gamma_\mu\gamma_\nu] + \tfrac{1}{2}\underbrace{\{\gamma_\mu\gamma_\nu\}}_{\delta_{\mu\nu}}\Big) D_\mu D_\nu = D^2 + \frac{1}{4}[\gamma_\mu\gamma_\nu]\overbrace{[D_\mu D_\nu]}^{=F_{\mu\nu}}$$

$$a(x) = \lim_{M\to\infty}\sum_n \varphi_n^+(x)\gamma_5 f\left(\frac{\not{D}^2}{M^2}\right)\varphi_n(x) = \lim_{M\to\infty} \mathrm{tr}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ikx}\gamma_5 f\left(\frac{\not{D}^2}{M^2}\right)e^{ikx}$$

$$\underset{\uparrow}{=} \lim_{M\to\infty} M^4\, \mathrm{tr}\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\gamma_5 f\left(\left(iq_\mu + \frac{D_\mu}{M}\right)^2 + \frac{[\gamma^\mu\gamma^\nu]F_{\mu\nu}}{4M^2}\right)$$

$e^{-ikx} D_\mu e^{ikx} = D_\mu + ik_\mu$ és $k=Mq$

kifejtjük $1/M$-ben, használva hogy $\mathrm{Tr}\,\gamma_\nu = 0$ $\quad \mathrm{Tr}\,\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\nu = 0$

$$\Rightarrow \quad a(x) = \mathrm{tr}\left[\frac{1}{2!}\gamma_5\left(\frac{1}{4}[\gamma_\mu,\gamma_\nu]\,F_{\mu\nu}\right)^2\right]\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\,f''(-q^2)$$

$$\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\,f''(-q^2) \underset{x=-q^2}{=} \frac{1}{16\pi^2}\int_0^\infty f''(x)\,x\,dx = \frac{1}{16\pi^2}\left[x f'(x)\Big|_0^\infty - f(x)\Big|_0^\infty\right] = \frac{1}{16\pi^2}$$

ha ezek teljesülnek, az eredmény flen a regulátortól

$$\left\{\begin{array}{l} f(0)=1 \\ f(\infty)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0} x f'(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x f'(x) = 0 \end{array}\right.$$

$\Lambda\to\infty$ limit után

elég gyors lecsengés

$$a(x) = \frac{1}{32}\,\frac{1}{16\pi^2}\,\underbrace{\mathrm{tr}_D\left(\gamma_5[\gamma_\mu\gamma_\nu][\gamma_\rho\gamma_\sigma]\right)}_{16\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}}\mathrm{tr}_C\,F_{\mu\nu}\,F_{\rho\sigma} = \frac{1}{32\pi^2}\,\mathrm{tr}_C\left(F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}\right)\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$$

$$= \frac{1}{16\pi^2}\,\mathrm{tr}_C\left(F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}\right)$$

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$$ duális térerősség tenzor

INSTANTONOK

hermitian generators

$$S_{YM} = +\frac{1}{2g^2}\int d^4x \; \mathrm{Tr}\left(F^2\right) = +\frac{1}{4g^2}\int \mathrm{Tr}(F \pm \tilde{F})^2 \mp \frac{1}{2g^2}\int \mathrm{Tr}\, F\tilde{F}$$

topologikus invariáns

$$\geq \mp\frac{1}{2g^2}\int \mathrm{Tr}\, F\tilde{F} = \frac{8\pi^2}{g^2}\left|Q_{top}\right|$$

MINIMUM, HA $\quad F = \pm\tilde{F}$

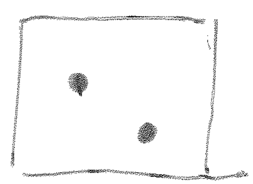
$$\boxed{F_{\mu\nu} = \pm\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}} \Rightarrow \text{HATÁS LOKÁLIS MINIMUMAI}$$

$Q_{top} = 1$ MEGO. : INSTANTON

$Q_{top} = -1$ MEGO. : ANTI-INSTANTON

$$S_{instanton} = S_{anti\text{-}instanton} = \frac{8\pi^2}{g^2}$$

$Q=1$  egy "adag" hatássűrűség és topologikus töltéssűrűség

$Q=2$ 

$\Rightarrow$ nulla Dirac módus (az instantonon van lokalizálva)

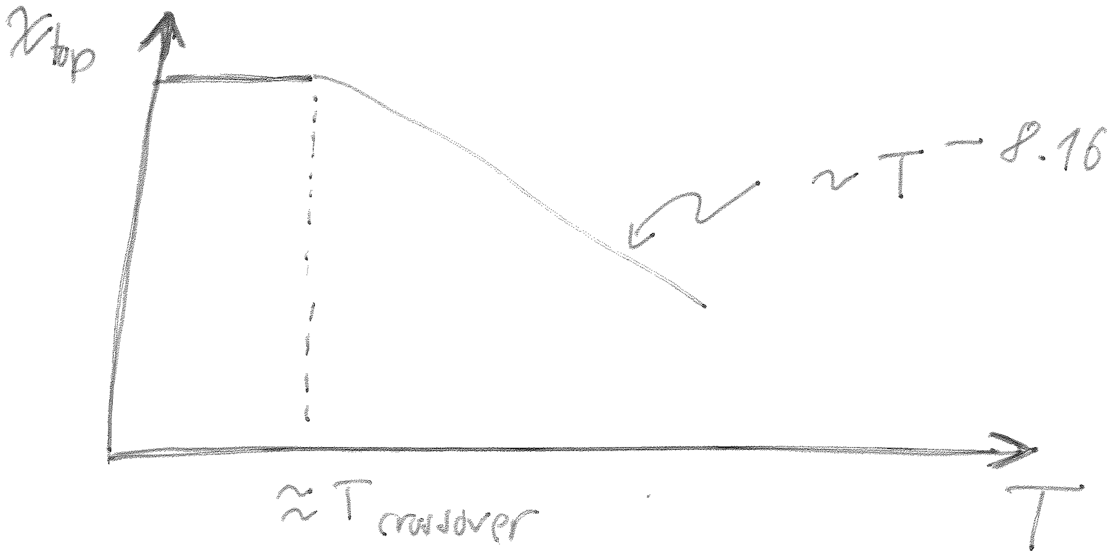
A TOPOLOGIKUS SZUSZCEPTIBILITÁS

$$\chi_{top} = \langle Q_{top}^2 \rangle / \Omega$$

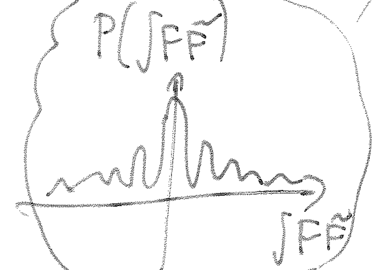
naív gluonikus def.

$\sim 1/a^4$ divergens

$\Rightarrow$ RENORMÁLNI KELL



gluonikus def. véges rácson



Megj.: nem királis fermionokkal nagyok a Dirac sajátértékek az instanton konfigurációkon (nincsenek nulla módusok)

$\Rightarrow$ $\det M$-ben nincsenek elnyomva a nagyobb Q-s konfig.

$\Rightarrow$ χ túl nagy véges rácson, nagy cut-off effektusok

KIRÁLIS KONDENZÁTUM

múlt óra: $D_{m_u} = D + m_u(1 - \frac{a}{2}D)$ a helyes tömegtag GW fermionokhoz

$= w_u D + m_u \quad (w = 1 - \frac{a m_u}{2})$

$$-\langle \bar{u}_L u_R + \bar{u}_R u_L \rangle = -\langle \bar{u}(1-\frac{a}{2}D)u \rangle = \frac{1}{\Omega}\frac{\partial}{\partial m_u} \log Z = \frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial m_u}$$

$$= \frac{1}{\Omega}\frac{1}{Z}\int DU \left(\frac{\partial}{\partial m_u}\det D_u\right) \det D_d \, e^{-S_G}$$

$$= \frac{1}{\Omega}\frac{1}{Z}\int DU \underbrace{\frac{\frac{\partial}{\partial m_u}\det D_u}{\det D_u}} \det D_u \det D_d \, e^{-S_G}$$

$$\frac{\partial}{\partial m_u} \ln \det D_u = \frac{\partial}{\partial m_u} \operatorname{tr} \log D_u = \operatorname{tr}\left(D_u^{-1} \underbrace{\frac{\partial}{\partial m_u} D_u}_{(1-\frac{a}{2}D)}\right)$$

$$\boxed{-\langle \bar{u}_L u_R + \bar{u}_R u_L \rangle = \frac{1}{\Omega a^4}\left\langle \operatorname{tr}\left[(1-\frac{a}{2}D)\, D_m^{-1}\right]\right\rangle}$$

pl. Wilson vagy staggeredre $\frac{\partial D_m}{\partial m} = 1$ numerikusan elvégezhető, ha tudunk

$$\Rightarrow -\langle \bar{u}u \rangle = \frac{1}{\Omega a^4}\langle \operatorname{tr} D_u^{-1} \rangle$$

$\det D_{m_u} \det D_{m_d} \, e^{-S_G[U]}$-val mértékkonfig. generálni

EGY KIS ALGEBRA $\quad D_m = WD + m \qquad D = \frac{D_m - m}{W} \qquad W = 1 - \frac{am}{2}$

$$\mathrm{tr}\left[D_m^{-1}\left(\mathbb{1} - \frac{a}{2}D\right)\right] = \mathrm{tr}\left[(WD + m\mathbb{1})^{-1}\left(\mathbb{1} - \frac{a}{2}D\right)\right] = \frac{1}{W}\,\mathrm{tr}\left[D_m^{-1}\left(W - \frac{aW}{2}D\right)\right]$$

$$= \frac{1}{W}\,\mathrm{tr}\left[D_m^{-1}\left(W - \frac{aW}{2}\left(\frac{D_m - m}{W}\right)\right)\right] = \frac{1}{W}\,\mathrm{tr}\left[D_m^{-1}\underbrace{\left(W + \frac{am}{2}\right)}_{=1} - \frac{a}{2}D_m^{-1}D_m\right]$$

$$= \frac{1}{W}\,\mathrm{tr}\left[(WD + m)^{-1} - \frac{a}{2}\mathbb{1}\right]$$

kicsit egyszerűbb alak

Trace-ek sztochasztikus számolása [NUMERIKAI KITÉRŐ]

ξ véletlen vektorok, olyan eloszlással, hogy $\langle \xi_a \xi_b \rangle_\xi = \delta_{ab}$ (komponens)

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{Tr}\, M = M_{aa} = M_{ab}\delta_{ab} = M_{ab}\langle \xi_a \xi_b \rangle_\xi = \xi_a M_{ab} \xi_b = (\xi, M\xi)$$

pl.: $\mathrm{Tr}[M^{-1}] = (\xi, M^{-1}\xi)$

NEM KELL KISZÁMOLNI AZ INVERZET!

$\times N_{\text{random vektor}}$
- random vektor ξ
- lineáris rendszer $M\xi = \eta$
- skalárszorzat (ξ, η)

$$\boxed{\mathrm{Tr}[M^{-1}] \approx \frac{1}{N_{\text{vektor}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{vektor}}} (\xi_i, \eta_i)}$$

i. random vektor

pl.:

$$P(\xi) \propto e^{-\frac{1}{2}(\xi,\xi)}$$

jó választás

direkt mintavételezhető

$$\Longrightarrow \quad \langle \mathrm{Tr}[M^{-1}] \rangle_G = \langle \langle (\xi, \eta) \rangle_\xi \rangle_G$$

$M\xi = \eta$

a mérés is egy mini MC szimuláció

BANKS – CASHER RELÁCIÓ

$(a=1)$

$$\mathrm{tr}\left[(WD+m)^{-1}-\frac{a}{2}\right]=\sum_{\lambda_i}\left(\frac{1}{w\lambda_i+m}-\frac{a}{2}\right)=\overset{\lambda=0}{(n_++n_-)}\left(\underbrace{\frac{1}{m}-\frac{a}{2}}_{=w/m}\right)$$

$$+\overset{\lambda=2/a}{(n_+'+n_-')}\underbrace{\left(\frac{1}{\frac{2w}{a}+m}-\frac{1}{2}\right)}_{=0}$$

$$+\sum_{\lambda_i\neq 0,\frac{2}{a}}\left(\frac{1}{w\lambda_i+m}-\frac{a}{2}\right)$$

$$=\frac{w}{m}(n_++n_-)+\frac{w}{2}\sum_{\varphi_i\neq 0,\pi}\frac{(1+\cos\varphi_i)m}{(2-2\cos\varphi_i)(am+w)\frac{w}{a^2}+m^2}$$

$\lambda_i=\frac{1}{a}(1-e^{i\varphi})$ komplex

és komplex konjugált tagokat összevonjuk

$$(am+W)w=\left(am+1-\frac{am}{2}\right)w=\left(1+\frac{am}{2}\right)w=\left(1-\left(\frac{am}{2}\right)^2\right)$$

$$\lim_{\Omega\to\infty}\frac{1}{\Omega}\left\langle \mathrm{tr}\left[(WD+m)^{-1}-\frac{a}{2}\right]\right\rangle\frac{1}{W} = \lim_{\Omega\to\infty}\frac{1}{\Omega a^4}\frac{\langle n_+ + n_-\rangle}{m} + \frac{1}{2a^4}\int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi\, \rho_A(\varphi)\frac{(1+\cos\varphi)\,m}{(2-2\cos\varphi)\left(1-\frac{a^2m^2}{4}\right)/a^2+m^2}$$

vonalmenti sűrűség a GW körön $\quad \rho_A(\varphi) = \lim_{\Omega\to\infty}\left\langle \frac{1}{\Omega}\sum_{\varphi_i\neq 0,\pi}\delta(\varphi-\varphi_i)\right\rangle$

első tag $\to 0$

szinte soha nincs egyszerre n_+ és n_-

$$\langle Q^2\rangle = \langle n_+^2 + n_-^2 - 2n_+n_-\rangle \approx \langle n_+^2 + n_-^2\rangle = 2\langle n_\pm^2\rangle$$

$\frac{\langle Q^2\rangle}{\Omega} \to$ véges $\Rightarrow \quad \langle n_\pm^2\rangle \sim V$

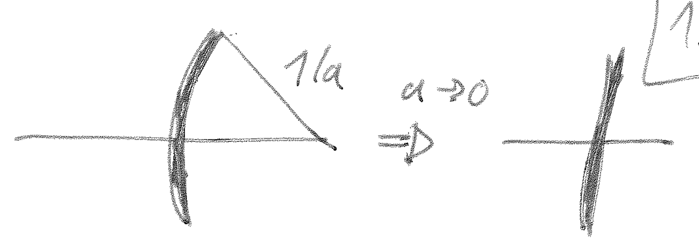
$$\Rightarrow \langle |n_+ + n_-|\rangle \sim \sqrt{V}$$

második tagban $\quad \delta_m(X) = \frac{1}{\pi}\frac{m}{X^2\left[1+O(m^2)\right]+m^2} \xrightarrow[m\to 0]{} \delta(X)$

$$\underset{m\to 0}{\Rightarrow} \frac{\pi}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi\,(1+\cos\varphi)\,\delta\left[\frac{1}{a}\sqrt{2-2\cos\varphi}\right]\rho_A(\varphi)$$

$$\Rightarrow \lim_{m\to 0}\lim_{\Omega\to\infty}\left(-\langle \bar{u}_L u_R + \bar{u}_R u_L\rangle\right) = \frac{\pi}{a^3}\rho_A(0)$$

Kontinuum közelében



$$\rho_\lambda = \frac{\Delta n}{\Delta y} \leftarrow \text{imaginárius intervallum}$$

$$\Delta y = \frac{\Delta\lambda}{a} \Rightarrow \rho_\lambda = a\rho_A$$

CASHER – BANKS

$$\boxed{\lim_{m\to 0}\ \lim_{\Omega\to\infty}\left(-\langle \bar{u}_L u_R + \bar{u}_R u_L\rangle\right) = \frac{\pi}{a^3}\rho_A(0) = \frac{\pi}{a^4}\rho_\lambda(0) = \pi\rho(0)}$$

egységnyi térfogatra sajátérték sűrűség az imag. tengelyen

"instanton liquid model"

instanton → zéró módus, CB-be nem ad járulékot

szabad instantonok gáza → szintén nem

gyengén kölcsönható instantonok → majdnem nulla módusok

→ $\rho(0)$-t tud generálni

KIRÁLIS SZUSZCEPTIBILITÁS

$$\frac{1}{\Omega}\frac{\partial^2}{\partial m^2}\log Z = \frac{1}{\Omega}\frac{\partial}{\partial m}\left\langle \frac{\partial}{\partial m}\ln\det D_m\right\rangle \qquad (\dots)' \equiv \frac{\partial}{\partial m}(\dots)$$

$$= \frac{1}{\Omega}\frac{\partial}{\partial m}\left\langle \mathrm{tr}\left(D_m^{-1} D_m'\right)\right\rangle \qquad D_m' = \begin{cases} 1 & \text{Wilson, staggered} \\ 1-\frac{a}{2}D & \text{overlap}\end{cases}$$

$$\frac{1}{\Omega} = \frac{T}{V}$$

általában $\frac{\partial}{\partial m}\langle O\rangle = \frac{\partial}{\partial m}\frac{1}{Z}\int DU\, O \det D_m\, e^{-S_G}$

$$= \langle O'\rangle + \frac{1}{Z}\int DU\, O\, \frac{(\det D_m)'}{\det D_m}\det D_m\, e^{-S_G}$$

$$- \frac{Z'}{Z^2}\int DU\, O \det D_m\, e^{-S_G}$$

$$= \left\langle \frac{\partial O}{\partial m}\right\rangle + \left\langle O\,\frac{\partial}{\partial m}\ln\det D_m\right\rangle - \langle O\rangle\left\langle\frac{\partial}{\partial m}\ln\det D_m\right\rangle$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial m}\left\langle\frac{\partial}{\partial m}\ln\det D_m\right\rangle = \left\langle\frac{\partial^2}{\partial m^2}\ln\det D_m\right\rangle + \left\langle\left(\frac{\partial}{\partial m}\ln\det D_m\right)^2\right\rangle - \left\langle\frac{\partial}{\partial m}\ln\det D_m\right\rangle^2$$

$$= \overbrace{\left\langle \mathrm{tr}\left(D_m^{-1}D_m'' + \underbrace{(D_m^{-1})'}\, D_m'\right)\right\rangle}^{\text{connected}} + \overbrace{\left\langle \mathrm{tr}\left(D_m' D_m^{-1}\right)^2\right\rangle - \left\langle \mathrm{tr}\left(D_m' D_m^{-1}\right)\right\rangle^2}^{\text{disconnected}}$$

$$D_m D_m^{-1} = 1$$

$$D_m' D_m^{-1} = -D_m (D_m^{-1})' \quad \Rightarrow \quad (D_m^{-1})' = -D_m^{-1} D_m' D_m^{-1}$$

véletlen vektor módszer $(\mathrm{tr})^2$ -re:

$$(\mathrm{tr}A)^2 = \lim_{N_v \to \infty} \underbrace{\frac{1}{N_v}\sum_{a=1}^{N_v} (\eta_a, A\eta_a)} \; \underbrace{\frac{1}{N_v}\sum_{b=1}^{N_v} (\eta_b, A\eta_b)}$$

függetlenek kell h. legyenek

$$= \lim_{N_v \to \infty} \frac{1}{\binom{N_v}{2}} \sum_{a<b} (\eta_a, A\eta_a)(\eta_b, A\eta_b)$$

RENORMÁLÁS

szabadenergia sűrűség $\quad e^{-\Omega f} = Z \quad \Rightarrow \quad f = -\frac{1}{\Omega} \log Z = -\frac{T}{V} \log Z$

UV divergens $\sim 1/a^4$

$f(T) - f(0) \Rightarrow$ UV véges

$m_r = Z_m m_u$ tömeg renormálás ($m \to 0$ limeszben kir. szimm. $\to$ multiplikatív tömegrenormálás)

$$m_r^2 \frac{\partial}{\partial m_r^2} = m_u^2 \frac{\partial}{\partial m_u^2}$$ $\leftarrow$ ebből a kombinációból kiesik a tömeg renormálás

$$\Rightarrow \quad m_u^2 \frac{\partial}{\partial m_u^2} \left[f(T) - f(0) \right] \Rightarrow \text{UV véges}$$

$$\boxed{\chi_{ren} = m_u^2 \left[\chi_{bare}(T) - \chi_{bare}(0) \right] / f_\pi^4}$$

csak dimenziótlanít

hasonlóan $\langle\bar\psi\psi\rangle_{ren} = -m_u \left[\langle\bar\psi\psi\rangle(T) - \langle\bar\psi\psi\rangle(0) \right] / f_\pi^4$

fizikai kvarktömegnél $\lim\limits_{V\to\infty} \lim\limits_{a\to 0} \chi_{ren}$ = véges $\Rightarrow$ CROSSOVER