

Bemelegítés: Gauss/Nem kölcsönhatás modell

$$S = \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\partial \phi)^2 + \frac{m^2}{2} \phi^2 \right]$$

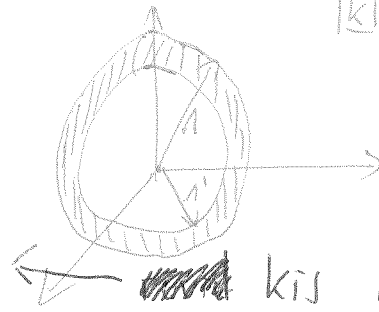
RG lépések

regularizáció: $|k| \leq \Lambda$

① rövid hullámhosszú (Λ) módusok kiikt.

$$\phi_k = \phi_k^- + \phi_k^+$$

$$\phi_k^- = \begin{cases} \phi_k & k < \Lambda' = \Lambda/b \\ 0 & k > \Lambda' \end{cases}$$



~~kis~~ kis k , nagy Λ

$$\phi_k^+ = \begin{cases} \phi_k & \Lambda' < k < \Lambda \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad \leftarrow \text{nagy } \Lambda, \text{ nagy } k$$

$$e^{-S'[\phi^-]} = \int \mathcal{D}\phi^+ e^{-S[\phi]}$$

② átskálázás $k \rightarrow k' = bk$ impulzusok
($\Rightarrow$ cutoff ismét Λ)

③ átskálázás $\frac{\sigma}{2} (\partial \phi)^2 \rightarrow \frac{1}{2} (\partial' \phi')^2$ mezők

$$S'_0[\phi] = \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\partial \phi)^2 + \frac{m_0^2}{2} \phi^2 \right] \xrightarrow{|k| \leq \Lambda} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 + m_0^2} \phi_k \phi_{-k}$$

$$\phi(x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ikx} \phi_k$$

① $S_0[\phi] = S'_0[\phi^+] + S_0[\phi]$ $\hookrightarrow$ mivel a kettő azonos értéket fog

$$e^{-S'_0[\phi]} = \underbrace{\int D\phi^+ e^{-S_0[\phi^+]}}_{\equiv \mathcal{N}} e^{-S_0[\phi]} \Rightarrow S'_0[\phi] = S_0[\phi] + \text{konst.}$$

② $k \rightarrow k' = bk$

$$\Rightarrow S'_0[\phi] = \int_{|k| < 1/b} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^2 + m_0^2}{2} \phi_k^- \phi_{-k}^-$$

$$= \int_{|k'| < 1} \frac{d^d k'}{(2\pi)^d} b^{-d} \frac{1}{2} \left(\frac{(k')^2}{b^2} + m_0^2 \right) \phi_{k'}^- \phi_{-k'}^-$$

③ $\gamma = b^{-d-2}$

rescale $\phi'_{k'} = \sqrt{\gamma} \phi_k = b^{-\frac{d+2}{2}} \phi_k$

$$\Rightarrow S'_0[\phi] = \int_{|k| < 1} \frac{d^d k'}{(2\pi)^d} \frac{k'^2 + m_0^2 b^2}{2} \phi'_{k'} \phi'_{-k'}$$

$$m^2(b) = m_0^2 b^2$$

szerkelet feltétel: $\xi(b) = \frac{1}{m(b)} = \frac{1}{m_0 b} = \frac{\xi_0}{b}$ (ahogy kell)

FP: $\frac{d\xi}{db} = 0 \Leftrightarrow \frac{dm^2}{db} = 0 \Rightarrow m^2 = 0$ vagy $m^2 = \infty$

$\xi = \infty$
Gauss FP
 $S^* = \int \frac{1}{2} \phi^2 dx$

$\xi = 0$
magas T FP
(mint a $K > 0$ esetén)

$$\xi \sim \frac{1}{m} \sim \frac{1}{\sqrt{T-T_c}}$$

$$\Rightarrow \boxed{V = 1/2}$$

$m=0 \Rightarrow \langle \psi(r) \psi(0) \rangle \sim \frac{1}{r^{d-2}} \leftarrow d\text{-dim. Coulomb potenciál}$

$\boxed{2=0}$

Kölcsönhatás eset perturbatíván

$$S[\phi] = \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\partial \phi)^2 + \frac{m^2}{2} \phi^2 + \sum_{n=4,6,\dots} \frac{g_n}{n!} \phi^n \right]$$

① kiintegrálni $1' < k < 1$ mértékegységet:

$m_0^2 \rightarrow m_0^2 + \delta m^2$

$g_{0,n} \rightarrow g_{0,n} + \delta g_n$
 $1 \rightarrow 1 + \delta \sigma$
 ezeket fogjuk perturbatíván számolni

② $h \rightarrow h' = b^k h$

③ átkalibrálás ~~$\frac{1}{2} (\partial \phi)^2$~~

$\phi'(x) = \sqrt{\sigma} b^{\Delta \phi} \phi(x)$

$$\int d^d x' b^d \left[\frac{1}{2} b^{-2-2\Delta \phi} (\partial' \phi)^2 + \frac{m_0^2 + \delta m^2(b)}{2} \frac{b^{-2\Delta \phi}}{\sigma} \phi^2 + \sum_{n \geq 4} \frac{g_{0,n} + \delta g_n(b)}{n!} \frac{b^{-n\Delta \phi}}{\sigma^{n/2}} \phi^n \right] + \dots \text{(maga több deriv.)}$$

$b^d b^{-2-2\Delta \phi} \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow \Delta \phi = \frac{d-2}{2}$

lin. fog. eh.-ja 1 legyen

$$\int d^d x' \left[\frac{1}{2} (\partial' \phi)^2 + \frac{m^2(b)}{2} \phi^2 + \sum_{n \geq 4} \frac{g_n(b)}{n!} \phi^n \right]$$

$m^2(b) = (\sigma(b))^{-2} [m_0^2 + \delta m^2(b)] b^2 \leftarrow \text{átkalibrálás}$

$g_n(b) = (\sigma(b))^{-\frac{n}{2}} [g_{0,n} + \delta g_n(b)] b^{d-n\Delta \phi} \leftarrow \text{Kölcsönhatási}$

ezt adja meg a dim. ana. az előző dőrtől

Perturbációs számítás

$$S'[\phi] = \int d^d x \left[\underbrace{\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{m_0^2}{2}\phi^2}_{\rightarrow S_0'} + \underbrace{\frac{g_0}{4!}\phi^4}_{\rightarrow S_I'} \right] = S_0'[\phi^+] + S_0'[\phi^-] + S_I'[\phi^+, \phi^-]$$

$$e^{-S'[\phi]} = e^{-S_0'[\phi]} \int D\phi_{\pm}^+ e^{-S_0'[\phi^+]} e^{-S_I'[\phi^+, \phi^-]} \\ = e^{-S_0'[\phi]} Z_{0,+} \langle e^{-S_I'[\phi^+, \phi^-]} \rangle_{0,+}$$

$$\Rightarrow S'[\phi^-] = S_0'[\phi^-] - \log \langle e^{-S_I'[\phi^+, \phi^-]} \rangle_{0,+} + \text{konst.}$$

$$= S_0'[\phi^-] + \langle S_I' \rangle_{0,+} - \frac{1}{2} \left(\langle S_I'^2 \rangle_{0,+} - \langle S_I' \rangle_{0,+}^2 \right)$$

$$+ \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \langle \langle S_I'^n \rangle \rangle_{0,+} + \dots$$

↑
 $S_I'[\phi^+, \phi^-]$ hurokláncok
 a $e^{-S_0'[\phi^+]}$ Gauss
 eloszlás szerint

$$S_I' = \frac{g_0}{4!} \int \prod_{i=1}^4 \frac{d^d k_i}{(2\pi)^d} \underbrace{\int d^d x e^{i(k_1 + \dots + k_4)x}}_{(2\pi)^d \delta^{(d)}(k_1 + \dots + k_4)} \quad [5 \text{ tag}]$$

$$i) 1 \phi_{k_1}^- \phi_{k_2}^- \phi_{k_3}^- \phi_{k_4}^- \rightarrow \int d^d x (\phi^-)^4 \text{ az } S' \text{-be}$$

$$ii) 4 \phi_{k_1}^- \phi_{k_2}^- \phi_{k_3}^- \phi_{k_4}^+ \rightarrow \phi$$

$$\boxed{iii) 6 \phi_{k_1}^- \phi_{k_2}^- \phi_{k_3}^+ \phi_{k_4}^+} \Leftrightarrow \text{érdekes tag}$$

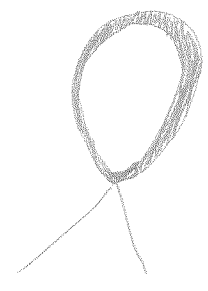
$$iv) 4 \phi_{k_1}^- \phi_{k_2}^+ \phi_{k_3}^+ \phi_{k_4}^+ \rightarrow \phi$$

$$v) 1 \phi_{k_1}^+ \phi_{k_2}^+ \phi_{k_3}^+ \phi_{k_4}^+ \rightarrow \text{nincs benne } \phi^- \rightarrow \text{konst. } S' \text{-be}$$

~~mc~~ érdekes tag:

$$\frac{6}{4!} \int \prod_{i=1}^4 \frac{d^d k_i}{(2\pi)^d} \phi_{k_1}^- \phi_{k_2}^- \underbrace{\langle \phi_{k_3}^+ \phi_{k_4}^+ \rangle_0}_{(2\pi)^d \delta^{(d)}(k_3+k_4)} + (2\pi)^d \delta^{(d)}(k_1+\dots+k_4) \frac{1}{k_3^2+m_0^2}$$

$$= \frac{6}{4!} \int_{|k| < 1/b} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \phi_k^- \phi_{-k}^- \int_{1/b < |q| < 1} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2+m_0^2}$$



$$\boxed{\frac{1}{2} \delta m^2(b) = \cancel{g_0} \frac{6}{4!} \int_{1/b}^1 \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2+m_0^2}}$$

$\Rightarrow O(g_0)$ rendben:

$$\boxed{m^2(b) = \left[m_0^2 + \frac{g_0}{2} \int_{1/b}^1 \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2+m_0^2} \right] b^2}$$

$$g(b) = g_0 b^{4-d}$$

β -fr.

$s = \log b$

$$\Rightarrow \left. \frac{d}{ds} \int_{\Lambda e^{-s}}^1 \frac{d^d q}{(2\pi)^d} f(q) \right|_{s=0} = \frac{d}{ds} \left[\frac{S_{d-1}}{(2\pi)^d} \int_{\Lambda e^{-s}}^1 dq q^{d-1} f(q) \right]$$

$$= \frac{d}{ds} \left[\frac{S_{d-1}}{(2\pi)^d} \Lambda^{d-1} f(1) [1 - \Lambda e^{-s}] \right]$$

$$= \frac{S_{d-1}}{(2\pi)^d} \Lambda^d f(1)$$

$$\Rightarrow \left[\frac{d(m^2/\Lambda^2)}{ds} = 2 \left(\frac{m^2}{\Lambda^2} \right) + \frac{S_{d-1}}{(2\pi)^d} \frac{g}{\Lambda^2+m^2} \frac{(\Lambda^4/\Lambda^2)}{\Lambda^2+m^2} + O(g^2) \right] \quad \frac{dg}{ds} = (4-d)g + O(g^2)$$

Linearizáció:

(6)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \beta_{m^2/\Lambda^2}}{\partial (m^2/\Lambda^2)} & \frac{\partial \beta_{m^2/\Lambda^2}}{\partial g} \\ \frac{\partial \beta_g}{\partial (m^2/\Lambda^2)} & \frac{\partial \beta_g}{\partial g} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \frac{m^2}{\Lambda^2} \\ \delta g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{\frac{d-1}{(2\pi)^d} \frac{1}{2}}{a} \\ 0 & 4-d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta m^2 \\ \delta g \end{pmatrix}$$

$$a = \begin{cases} (d=3) & \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \approx 0.025 \\ (d=4) & \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \approx 0.006 \end{cases}$$

sajátvelek:

$$\begin{pmatrix} \frac{d-2}{a} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a \\ 0 & 4-d \end{pmatrix} = 2 \left(\frac{d-2}{a} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a \\ 0 & 4-d \end{pmatrix} = (4-d)(0)$$

háromszög matrix, mert

soke lábbal operátor $\rightarrow$ kevesebb lábbal operátor (hurkolek)

háromszög $\rightarrow$ sajátértékek a diag. elemek

$\rightarrow$ dimenzióanalízis jó eredményt ad a sajátértékekre (megmondja h. egy operátor rel. / irr. , ha naivan nem mágindul).

$O(g^2)$ rend, $-\frac{1}{2} \left[\langle S_I^2 \rangle_{a,+} - \langle S_I \rangle_{a,+}^2 \right]$

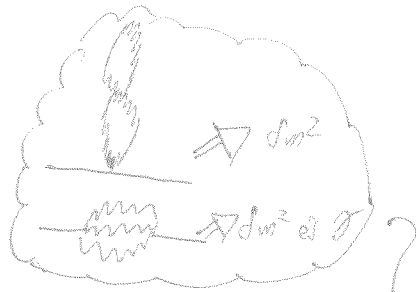
$\phi_- \leftarrow$ külső lábak (nincs $\langle \dots \rangle$) $\sum d=256$ tag, de a többi vagy 0, vagy high

$\phi_+ \leftarrow$ hurkolek (van $\langle \dots \rangle$) a lemond vagy érdektelen

$$\langle S_I^2 \rangle = \left(\frac{g_0}{4!} \right)^2 \int d^d x \int d^d y \langle (\phi_+(x) + \phi_-(x))^4 (\phi_+(y) + \phi_-(y))^4 \rangle_{a,+}$$

plan : db $\phi^- \Rightarrow \emptyset$
 0 db $\phi^- \Rightarrow$ konst.

2 db	ϕ^-	$\Rightarrow \delta m^2$ és σ
4 db	ϕ^-	$\Rightarrow \delta g_4$



MCIT EZT NÉZZÜK

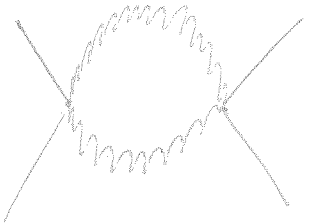
ezek érdekességek

6 db ϕ^-
 8 db ϕ^- } ebben a rendszerben
 kiejti az $\langle S_I \rangle^2$

mert nem
 össze függő

pl: X

not connected



$$-\frac{1}{2} \langle S_I^2 \rangle_{0+} - bde$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right) \binom{4}{2} \left(\frac{g_{04}}{4!}\right)^2 \int_0^{1/b} \frac{4}{\pi} \left[\frac{d^4 k_i}{(2\pi)^4} \phi_{k_i}^-\right] \int_0^{1/b} \frac{4}{\pi} \left[\frac{d^4 l_j}{(2\pi)^4} \phi_{l_j}^+\right] \left[\langle \phi_{q_1}^+ \phi_{q_2}^+ \phi_{q_3}^+ \phi_{q_4}^+ \rangle \right. \\ \left. \times \delta(\pi) \delta^{(d)}(k_1+k_2+q_1+q_2) \times \delta(\pi) \delta^{(d)}(k_3+k_4+q_3+q_4) \right]$$

mindkettő ϕ^- -t
 a 4-ből minden
 faktorból X2

$$= -36 \left(\frac{g_{04}}{4!}\right)^2 \int_0^{1/b} \frac{4}{\pi} \left[\frac{d^4 k_i}{(2\pi)^4} \phi_{k_i}^-\right] \int_0^{1/b} \frac{d^4 e}{(2\pi)^4} \frac{1}{(e^2+m_0^2)^2} \delta^{(d)}(k_1+k_2+k_3+k_4)$$

$$\Rightarrow \delta g_4 = -\frac{3}{2} \int_0^{1/b} \frac{d^4 e}{(2\pi)^4} \frac{1}{(e^2+m_0^2)^2} = \delta g_4 = \left[g_{0,4} - \frac{g_{0,4}^2}{2} \int_0^{1/b} \frac{d^4 e}{(2\pi)^4} \frac{1}{(e^2+m_0^2)^2} \right] b$$

$\Rightarrow$

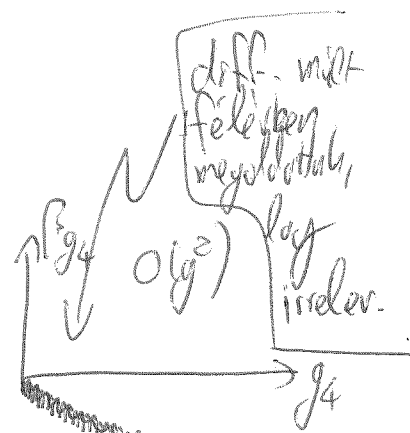
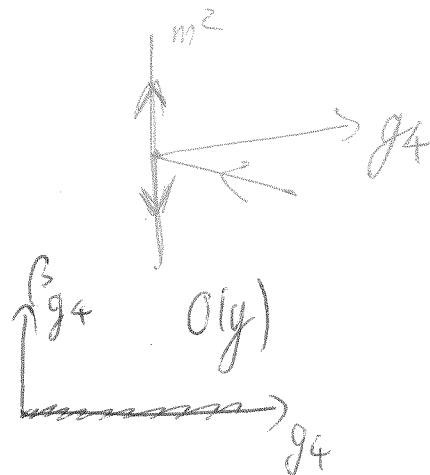
$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dm^2}{ds} &= 2m^2 + \frac{s(d-1)}{(2\pi)^d} \frac{g_4}{2} \frac{\Lambda^4}{\Lambda^2+m^2} + O(g_4^2) \\ \frac{dg_4}{ds} &= (4-d)g_4 - \frac{s(d-1)}{(2\pi)^3} \frac{3}{2} g_4^2 \frac{\Lambda^4}{(\Lambda^2+m^2)^2} + O(g_4^3) \end{aligned} \right\}$$

✱✱

kérdés #1: mi lesz a marginális l.h.-al ha $d=4$?

18

válasz: irreleváns lesz



LINEARIZÁCIÓ NEM MINDIG HELYRE LÁTJUK, MERT:

ϵ sorfejtés

$$\epsilon \equiv 4-d$$

És lehet róla úgy gondolni pl., mint analitikus előfeltétel a β -f.-es diff. egyenletben

$$[g_4] = \Lambda^\epsilon = [\text{energia}]^\epsilon$$

$$\tilde{g}_* \equiv \Lambda^{-\epsilon} g_4 \text{ dimenziótlans}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{dm^2}{ds} = 2m^2 + \frac{g_4}{16\pi^2} \frac{\Lambda^4}{\Lambda^2 + m^2} + O(\tilde{g}_*^2, \tilde{g}_* \epsilon)$$

$$\frac{d\tilde{g}_*}{ds} = \epsilon \tilde{g}_* - \frac{3}{16\pi^2} \tilde{g}_*^2 \frac{\Lambda^4}{\Lambda^2 + m^2} + O(\tilde{g}_*^3, \tilde{g}_*^2 \epsilon)$$

$\tilde{g}=0$ $m^2=0$ Gauss FP $\Rightarrow$ 2 rel. op., a velt. dimenzióval (Z és ϵ) ($\frac{\partial \beta}{\partial g}$ szigorúképpen)

$\epsilon > 0$ új FP: Wilson-Fisher FP

$$\tilde{g}_* = \frac{16\pi^2}{3} \epsilon + O(\epsilon^2)$$

$$m_*^2 = -\frac{1}{6} \Lambda^2 \epsilon + O(\epsilon^2)$$

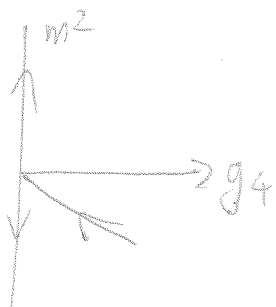
ebben a pontban a $\frac{\partial \beta}{\partial g}$ szigorúképpen

$$y_t \equiv y_1 = 2 - \frac{\epsilon}{3} + O(\epsilon^2)$$

$$y_2 = -\epsilon + O(\epsilon^2)$$

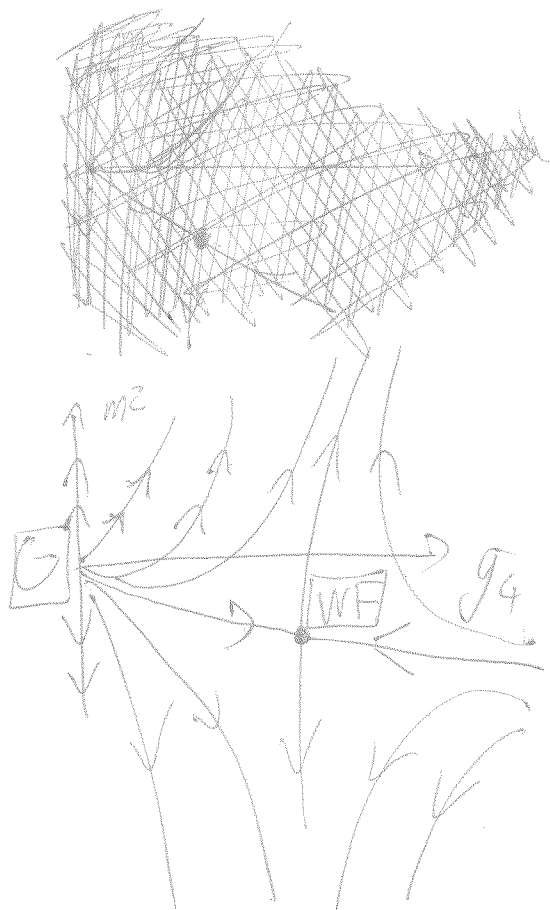
ha $\varepsilon \ll 1 \Rightarrow \tilde{g}_x \ll 1$ tehát a perturbatív
 számolás OK [9]

$$d=4$$



$$d=4-\varepsilon$$

$$\varepsilon \ll 1$$



Kritikus exponensek

skálázó operátorok

110

$$S = S^* + \lambda_1 \int d^d x \phi_1^2 + \dots + \lambda_m \int d^d x \phi_m^2$$

most $\phi_1 \approx \psi$ [hozzáadunk $\int H \psi d^d x$ tagot]

$$\phi_2 \approx \psi^2$$

assuming a weakly coupled FP

skálázás:

$$x \rightarrow x/b$$

$$d^d x \rightarrow b^{-d} d^d x$$

$$\lambda_i \rightarrow b^{y_i} \lambda_i$$

hatalm. inv., ha

$$\phi_i \rightarrow b^{x_i} \phi_i$$

ahol $x_i = d - y_i$

@ FP:

$$G_i(r) = \langle \phi_i(\vec{r}) \phi_i(\vec{0}) \rangle \sim \frac{1}{r^{d-2+\eta_i}}$$

$$G_i(r/b) = b^{2x_i} G_i(r)$$

$$r=a \quad b=a/R \Rightarrow G_i(R) = \left(\frac{a}{R}\right)^{2x_i} G_i(a)$$

$$\Rightarrow x_i = \frac{d-2+\eta_i}{2}$$

$$\eta \approx 2-d+2x_i = 2+d-y_i$$

nem standard skálázás (standard: σ) $O(\epsilon^2)$

$$\eta = O(\epsilon^2)$$

1 releváns param. képe

FP közel:

$$G_i(r/b, b^{y_i} \lambda_i) = b^{2x_i} G_i(r, \lambda_i)$$

$$\Rightarrow G_i(R) = \left(\frac{a}{R}\right)^{2x_i} G_i(a, \lambda_i \left(\frac{R}{a}\right)^{y_i}) = \frac{1}{R^{2x_i}} f_i(\lambda_i^{1/y_i})$$

$$\Rightarrow \xi \sim \lambda_i^{-1/y_i}$$

$$\lambda_k \sim t$$

$$\xi \sim t^{-V} \sim t^{-\frac{1}{y_t}} \sim t^{-\frac{1}{y_{\text{avg}}^2}}$$

non standard
jelölés, standard: G

circled
line

$$V = \frac{1}{y_t} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\epsilon + O(\epsilon^2)$$

	V.	2
szabad/MF	0.5	0
$O(\epsilon)$ @ $\epsilon=1$	0.58	0
$d=3$	0.63	0.036

pl. MC szimulációk

magasabb rend + extra
matematikai trükkökkel sokkal
jobb egyező eredmény

ezelebről a téma krit. exp. 17 kifejezhető

