

Kísérleti megfigyelés

Másodrendű fázisátalakulások $\Rightarrow$ hatvány-függés viselkedés

mágneses rendszerek

folyadékok

$$t = \frac{T - T_c}{T_c}$$

$$[H=0] \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_H = C_H \sim |t|^{-\alpha}$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = C_V \sim |t|^{-\alpha}$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial H} \right)_T = M \sim (-t)^\beta$$

$$P_{\text{foly}} - P_{\text{gáz}} \sim (-t)^\beta$$

$$\left(\frac{\partial M}{\partial H} \right)_T = \chi_T \sim |t|^{-\gamma}$$

$$-\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = K_T \sim |t|^{-\gamma}$$

$$[t=0] M \sim \text{sign}(H) |H|^{1/\delta} \quad \text{kritikus izotermia}$$

$$P - P_c \sim \text{sign}(P - P_c) |P - P_c|^{1/\delta}$$

$$\begin{aligned} [H=0, t=0] \langle \sigma(\vec{r}) \sigma(\vec{0}) \rangle &\sim \langle \sigma \rangle^2 \\ &\sim G(\vec{r}) \sim 1/r^{d-2+\eta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [P=P_c, T=T_c] \langle P(\vec{r}) P(\vec{0}) \rangle &\sim \langle P \rangle^2 \leftarrow \text{cserélés} \\ G(\vec{r}) &\sim 1/r^{d-2+\eta} \end{aligned}$$

Különböző rendszerekben ugyanazok a kritikus exponensek.

$\Rightarrow$ UNIVERZALITÁSI ÖSZTÁLYOK

- szabadsági fokok (skalár, vektor etc.)
(komponensek száma)

- szimmetriák

- térdimenzió

- kölcsönhatás hatótávolsága $\leftarrow$ itt csak rövidtávú
folyadékok

pl. 3D Ising-modell és folyadék-gáz ugyanaz az univ. osztályban.

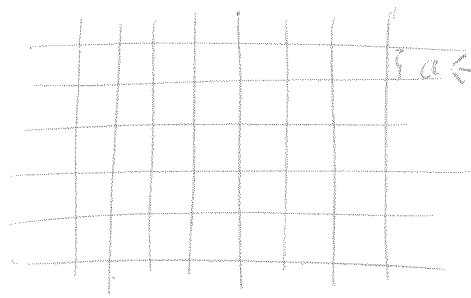
Kadanov-Wilson féle renormálási csoport

Tfh. • d-dim rács (háló)

• mikro skála

• rácspontokban σ_i
szabadági fokok
(pl. Ising-spinok)

• Boltzmann-súlyok



lehet összeg (Ising)
vagy integrál (O(N))

$$Z = \sum_{\{\sigma_i\}} e^{-H(\{\sigma_i\})}$$

"hatás"

A hatást beágyazzuk a hatások egy d dimenziós
terébe, ahol egy pontot d sok csatolási állandóval jell.

$$H(\{\sigma_i\}, g_k) = \sum_i g_i^{(1)} \sigma_i + \sum_{i,j} g_{ij}^{(2)} \sigma_i \sigma_j + \sum_{i,j,k} g_{ijk}^{(3)} \sigma_i \sigma_j \sigma_k + \dots = \sum_{\alpha} g_{\alpha} O_{\alpha} \quad (+ \text{ konstans})$$

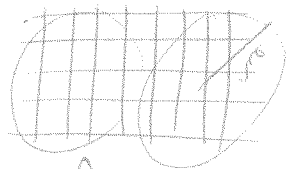
pl. Ising-model: $\sigma_i = \pm 1$ szabadági fokok

$$g_i^{(1)} = \frac{H}{k_B T}$$

$$g_{ij}^{(2)} = \begin{cases} \frac{J}{k_B T} & \text{ha } i \text{ és } j \text{ első szomszédok} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$g_{ijk}^{(3)} = g_{ijhe}^{(4)} = \dots = 0$$

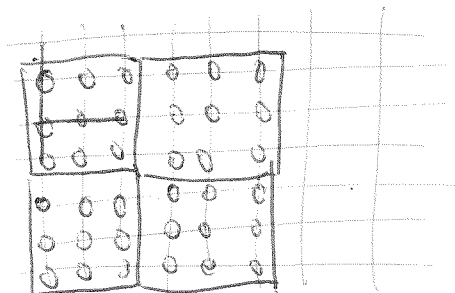
shálva: a
akro shálva: ξ



a: stat. fizben adott 13
 ξ : csatlakozással függ

krit. pont: $\frac{v_c}{u} \rightarrow \infty$ az egész rendszer korrelált
bb. fénv. alternatívák

1) blokk változók / blokk spinek



B_k blokkok, könnük b^d változó/spin

ij változók: 1 változó / blokk

$$\sigma_k^{(n)} = f(\{\sigma_i^{(n-1)}\}_{i \in B_k})$$

$\Rightarrow$ ij kerfig. egy ij rácsra, amelyre az
 ij rácsállandója $a \rightarrow b, a$

Példák: ① decimation



középső változó

② majority rule



1. szing. változó

1. szing. változó

③ átlagolás

1. szing. változó: ± 1

$$\Downarrow (b=3)(d=2)$$

$$\pm 1, \pm \frac{7}{9}, \pm \frac{5}{9}, \pm \frac{3}{9}, \pm \frac{1}{9}$$

$\Downarrow$ meggyűző

$$\pm 1, \pm \frac{16}{18}, \pm \frac{14}{18}, \dots, \pm \frac{2}{18}, 0$$

$\Downarrow \dots$

$$[-1, +1]$$

Feladat: $T(\sigma_k^{(n+1)}, \sigma_i^{(n)}) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$

$f(\{\sigma_i^{(n)}\}) = \sigma_k^{(n+1)}$
egységként

$$\sum_{\sigma_k^{(n+1)}} T(\sigma_k^{(n+1)}, \sigma_i^{(n)}) = 1$$

② "konstanta fizika" $\rightarrow$ új csatlakozás

$$e^{-H^{(n+1)}(\{\sigma_k^{(n+1)}\}, \vec{g}^{(n+1)})} = \sum_{\{\sigma_i^{(n)}\}} \prod B_k T(\sigma_k^{(n+1)}, \sigma_i^{(n)}) e^{-H^{(n)}(\{\sigma_i^{(n)}\}, \vec{g}^{(n)})}$$

+ normálás

$$\sum_{\sigma^{(n)}} H^{(n)}(\{\sigma_i^{(n)}\}, \vec{g}^{(n)}) = 0$$

Ötlet: az új konfigurációra ami ezekhez az új változókhoz vezet, az $\vec{c}$ megfelelő Boltzmann-súlyával

$\Rightarrow$ az a particiós fn.

$$\sum_{\{\sigma_k^{(n+1)}\}} e^{-H^{(n+1)}(\{\sigma_k^{(n+1)}\}, \vec{g}^{(n+1)})} = \sum_{\{\sigma_k^{(n+1)}\}} \sum_{\{\sigma_i^{(n)}\}} \prod B_k T(\sigma_k^{(n+1)}, \sigma_i^{(n)}) \times e^{-H^{(n)}(\{\sigma_i^{(n)}\}, \vec{g}^{(n)})}$$

$$\Rightarrow Z^{(n+1)}(\vec{g}^{(n+1)}) = Z^{(n)}(\vec{g}^{(n)})$$

$\Rightarrow$ hasonlóan, az új változók tetszőleges fn.-ek a rögzített értékeihez

$$\begin{aligned} \langle X \rangle &= \frac{1}{Z^{(n+1)}} \sum_{\{\sigma_k^{(n+1)}\}} X(\{\sigma_k^{(n+1)}\}) e^{-H^{(n+1)}(\{\sigma_k^{(n+1)}\}, \vec{g}^{(n+1)})} \\ &= \frac{1}{Z^{(n)}} \sum_{\{\sigma_i^{(n)}\}} X(\{\sigma_i^{(n)}\}) e^{-H^{(n)}(\{\sigma_i^{(n)}\}, \vec{g}^{(n)})} \end{aligned}$$

átskálázás $a \rightarrow \frac{1}{b} a_{ij}$ = eredeti méskálázó

5

- ① blokk spinel/coarse graining
- ② konstans IR fizika $\rightarrow$ új csatlósók
- ③ átskálázás $1/b$ -vel

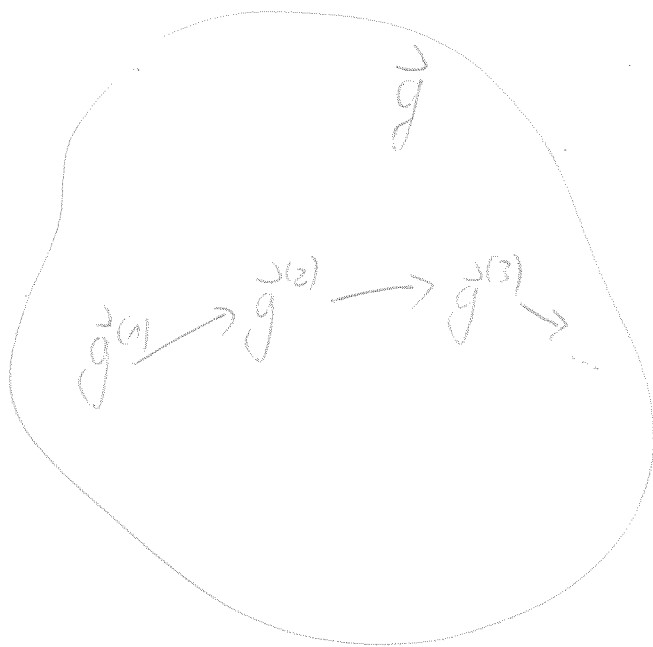
RG lépés



iteráció

$$\vec{g}^{(n+1)} = R(\vec{g}^{(n)})$$

iterált leképezés
a csatlósók tereben
(a ∞ dimenziós térben
ahol az eredeti határait
beágyaztuk)



$$\text{ha } b = 1 + \epsilon$$

$$\epsilon \ll 1$$

$\Rightarrow$ folytonos
trajektoria
a csatlósók
terében (RG flow)

a trajektoria pontjai "azaz" a fizikai szimulációk igyeke-
léi, de mivel az új méskálázó szerint megadjuk a korr. határt

$$\xi(\vec{g}^{(n+1)}) = \frac{1}{b} \xi(\vec{g}^{(n)}) \quad (*)$$

Fix pontok:

$$g^* = R(g^*)$$

FP-ban (*)

miatt

$$\xi = 0$$

vagy

$$\xi = \infty$$

$\uparrow$ triviális
FP

Linearizáció a FP körül : KÉRDÉS: van-e / tart-e / irány-e
a FP körül

$$g^* + dg^* = R(g^* + dg) \cong R(g^*) + K dg = g^* + K dg$$

$$dg_a^* = K_{ab} dg_b \quad K_{ab} := \frac{\partial R_a}{\partial g_b}$$

K nem szimmetrikus $\rightarrow$ jobb és bal sajátértékek

$$\sum_a \Delta_a^i K_{ab} = \lambda^i \Delta_a^i$$

$\uparrow$ bal sajátérték $\uparrow$ sajátérték

Legyen $u_i \equiv \sum_a \Delta_a^i dg_a$ szkálázó
változók

$$u_i^* = \sum_a \Delta_a^i dg_a^* = \sum_{ab} \Delta_a^i K_{ab} dg_b = \sum_b \lambda^i \Delta_b^i dg_b = \lambda^i u_i$$

$$\lambda^i := b^{y_i} \quad \text{gyakorlati parametrizáció}$$

Tf. $y_i \in \mathbb{R}$

① $y_i > 0$ releváns RG tráfka merül a FP-HE

② $y_i < 0$ irreleváns ——— kezeletb ———

③ $y_i = 0$ marginális nem változik

m = csatlások száma (tipikusan ∞)

n = releváns csatlások # ($-1 - \log_2 Z$)

$m-n$ = irreleváns -11 - (-11- ∞)

$m-n$ dim. felület amiről g^* FP-ba kerülnek a RG trafók

kritikus felület

a krit. felületen mindenhol $f = \infty$

hiszen $f(\vec{g}) = b f(\vec{g}^{(1)}) = \dots = b^n f(\vec{g}^{(n)})$

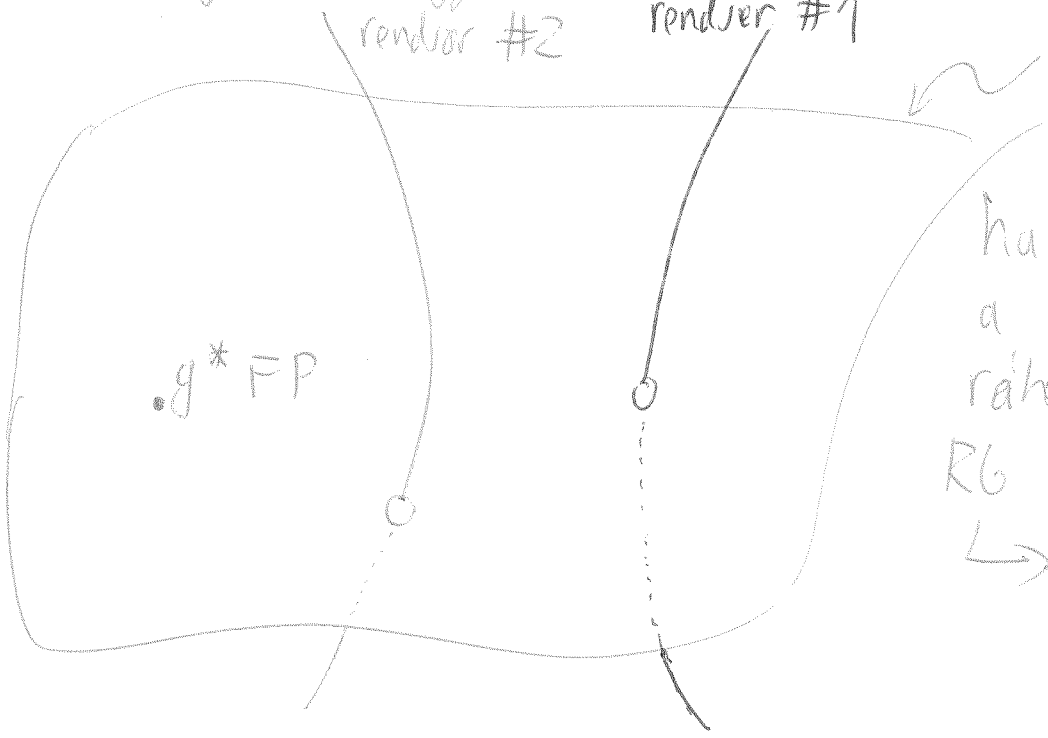
és $\vec{g}^{(n)} \rightarrow \vec{g}^*$ ahol $f(\vec{g}^*) = \infty$

n releváns param. esetén n paramétert

 kell hangolni, hogy a krit. felületre érkezve

 render #2 render #1

 krit. f.



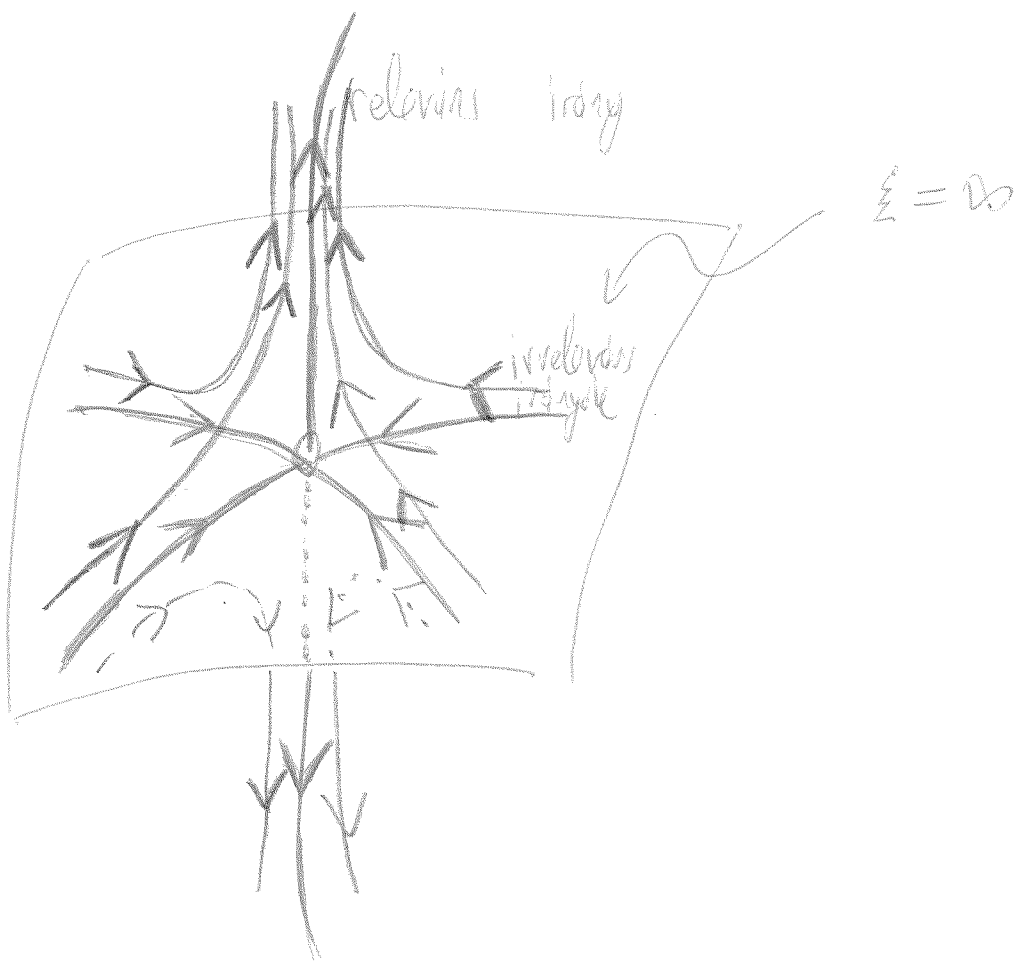
ha pedig a krit. felületre rákerültünk akkor RG trafók

$\rightarrow g^*$ FP-ba

 vészt és

 ez adja meg a nagy tav.

$\Rightarrow$ UNIVERZALITÁS (ha csak irreleváns paramétereket nem változtatunk)



összehasonlítás az előző dr diagramjaival

stat. fiz.

nyílak: $\frac{\xi}{a}$ vektorok

ellenkező
irány

részfiz.

nyílak: $\frac{s^6}{a}$ nő

∞ param.
kritikus felület

} "szelők"

2 param. (szelők a 2D-nél
krit. vonal (szelők a krit.
felülethez))

∞ param.

⇨ átlagolt (coarse grained)
változók minél
kiseb. fr.-e van

2 param.

⇨ g_E uaz

subset of

Köv. dr: Gauss fix pont, perturbatív RB

ha $\xi/d \gg 1$

$$Z = \sum_{\{\sigma_i\}} e^{-H(\{\sigma_i\})} \cong \int D\psi e^{-S(\{\psi\})}$$

1. lépés rendparaméter
 $\psi(x)$ folytonos változó, lokális rendparaméter
 (lokálisan átlagolt mágnesezettség)

Ising-modell $\Rightarrow \mathbb{Z}_2$ szimm. $\Rightarrow$ skálár $\psi(x)$
 (H=0) szimm. $\psi \rightarrow -\psi$

$O(n)$ $\Rightarrow$ N komponensű skálár
 $\Phi(x) = (\phi_1(x), \dots, \phi_n(x))$
 szimm. $\phi_i \rightarrow O_{ij} \phi_j$

2. lépés hatás $\leftarrow$ legyen a szimmetriakal konzervens
 pl. Ising eset

$$S = \int d^d x \left[\frac{\sigma}{2} (\partial_\mu \psi)(\partial_\mu \psi) + g_1 \psi + \frac{g_2}{2} \psi^2 + \dots + \frac{g_n}{n!} \psi^n \right]$$

$g_1 \propto H$

$(\partial \psi)^2 \leftarrow$ bünteti azt, hogyha lokálisan gyorsan változik a mágnesezettség

$\sigma \leftarrow$ "gradiens sorfejtés" $\leftarrow$ mikroszkopikus $4h$ hatótávra $\leftarrow$ függ. d -re ψ átkalibrált $\Rightarrow \sigma=1$

Miért nincs $\phi \partial^2 \phi$ tag?

- inv. $\phi \rightarrow -\phi$ -re $\checkmark$
- invariáns térbeli forgatásra $\checkmark$
- ugyanolyan rendű deriváltakban mint $(\partial\phi)^2$ $\checkmark$

DE: $\partial(\phi \partial\phi) = \phi \partial^2 \phi + (\partial\phi)^2$

$\Rightarrow \int d^d x \phi \partial^2 \phi = \underbrace{\int d^d x \partial(\phi \partial\phi)}_{\text{felületi tag}} - \int d^d x \cancel{(\partial\phi)^2}$
 termo. limetben elhanyagolható

3. integrálmérték

$\phi(x)$ -nek

perturbatíván a renormálfüggvények egy sorát a momentum cut-off Fourier módjai $\Lambda \sim \frac{1}{a}$ felett

tehát pl. $\mathcal{D}\phi = \prod d\phi/h$

stat. fiz. $\Rightarrow$ érvel, hogy $0 \leq |k| \leq \frac{1}{a}$
 rdutérmdélet $\Rightarrow$ megfordítjuk a lagrangian, másodrendű fejeletet közelítő QFT
 dimenziáanalízis $[d^d x (\partial\phi)^2] = a^0$ és stat. fiz. rendszerrel def. a QFT-t

$$(\partial\phi)^2 = d - d$$

$$a^{-2}[\phi]^2 = a^{2-d}$$

$$[\phi] = a^{1-d/2}$$

$$[g_n \phi^n] = a^{-d} \Rightarrow [g_n] = a^{-d-n+\frac{nd}{2}} \equiv a^{\delta_n}$$

$\delta_n \geq 0$ ha $d \geq \frac{2n}{2-n}$ $\leftarrow$ g_2 -re $6d$, g_4 -re $4d$

$\delta_n \leq 0 \Rightarrow a \rightarrow 0$ limitben $g_n \rightarrow 0$

(vdrakozás: kont. limitben irreleváns)

$\delta_n > 0 \Rightarrow a \rightarrow 0$ limitben $g_n \rightarrow 0$

(vdrakozás: kont. limitben releváns)

$\delta_n = 0$
pl.

$\Rightarrow$ naiv dimenziászámítás szerint marginálisan releváns $\nearrow$ marginálisan releváns
marginálisan irreleváns $\searrow$

$g_4 \phi^4$ tag

$d > 4$: irreleváns

vdrakozás:

~~irreleváns~~ ~~irreleváns~~ ~~irreleváns~~

$d > 4$ dimenzióban elég a szabad térelméletet nézni, ahol

$$S = \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\partial \phi)^2 + g_1 \phi + g_2 \phi^2 \right]$$

$$g_2 \sim (T - T_c) \sim m^2$$

$$\xi \sim \frac{1}{m} \sim \frac{1}{\sqrt{g_2}} \sim \frac{1}{\sqrt{T - T_c}} \Rightarrow \frac{(d-4)}{2} = \frac{1}{2}$$

$d=4$: ϕ^4 marginálisan irrel. 11

$d=3$: ϕ^4 releváns, igazi kölcsönhatás
tér elméletben kell számolni hogy
hiszámoljuk pl. a krit. exponenseket

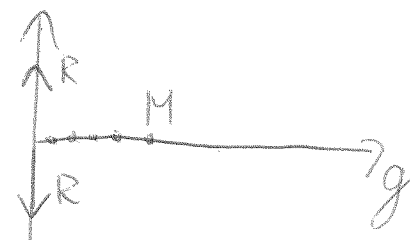
KÖV. ÓRA: RG amplitudók g_4 -ben

perturbatíván

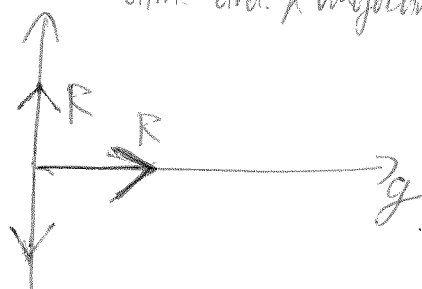
- $g_4 \rightarrow 0$ (Gauss FP) $\Rightarrow$ dim. and. ϕ erőteljesen
- $d=4$: $g_4 \rightarrow$ margin. irrel.
- $d < 4$: $\exists$ másika FP $\Rightarrow$ Wilson-Fisher



$$d = 4$$

 $d < 4$
$$m^2 \frac{d}{m} \quad \text{and:}$$


m^2 d/m. an. & valjebars



valgfabrik:



A kh. 2 dolgot sindel

- ① nem a ψ^4 lesz a sajátvektor
hanem a ψ^2 és ψ^4 lineáris
~~függvényeinek lineáris kombinációja~~ (de ψ^4)
② margindla $\Rightarrow$ irrel.
(margindlan irrel.)

amikor dim. anal. $\alpha^0 - t$ ad
lehet $\log \nearrow$ vagy $\log \searrow$
 $\underbrace{\hspace{10em}}$
YM/QCD ϕ^4

β fr.-ek

VOLT

11"

$$b = e^s$$

$$\frac{d}{d \log b} = \frac{d}{ds}$$

$$\frac{d g_n}{ds} = \beta_n(\{g_i\})$$

vol. formező"
a csatlakozó terén

(ellenfelelőleg, mint az előző drán, ahol energiateljesítmény drán.)

$$\text{FP : } \vec{\beta}(\{g^*\}) = \vec{0}$$

a FP körül a RG frakció mátrixa $b = e^s$

$$K_{ab} = \frac{\partial R_a}{\partial g_b} = \delta_{ab} + \frac{\partial \beta_a}{\partial g_b} ds$$

sajátérték: $(1 + ds) y_i = 1 + ds y_i$

$$\Rightarrow \left[y_i - k \quad a \quad \frac{\partial \beta_a}{\partial g_b} \right]_{g^*} \text{ mátrix sajátértékei}$$

a Δ^i -k felel meg a hal sajátvektorai